3 Elektrika: frontalno

3.1 Notranji upor

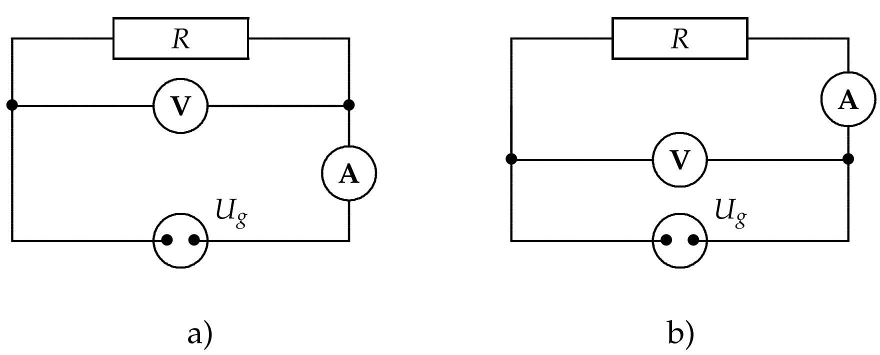
Notranji upor voltmetra in ampermetra Pri merjenju napetosti in toka na porabniku v vezju na sliki 1a potrebujemo voltmeter s kar največjim uporom, da teče skozenj zanemarljivo majhen tok, in ampermeter s kar se da majhnim uporom, da je na njem zanemarljivo majhna napetost. To je v splošnem prevelika idealizacija. V praksi – na primer pri merjenju upora – raje izberemo vezje, ki je prirejeno danim okoliščinam in gornji zahtevi glede instrumentov bistveno omili.

Analiza vezja s slike 1a kaže, da moramo upoštevati v računu upora tok I_A, ki ga kaže ampermeter, zmanjšan za tok skozi voltmeter $I_V = U_V/R_V$. Zato velja

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_V}{I_A - U_V/R_V} = \frac{R'}{1 - R'/R_V}\,, \tag{1}$$

kjer je napetost na uporu U enaka napetosti, ki jo kaže voltmeter U_V. Z $R' = U_V/I_A$ smo označili vrednost upora, ki bi ga izračunali brez upoštevanja notranjega upora instrumenta. Pri tej vezavi moramo upoštevati upor voltmetra R_V, razen v primeru, ko je $R_V \gg R'$ (tedaj je tudi $R_V \gg R$) in lahko tok skozi voltmeter zanemarimo. Tedaj je

$$R = R' = \frac{U_V}{I_A}\,. \tag{2}$$



Slika 1: Vezava voltmetra in ampermetra pri merjenju napetosti in toka na porabniku.

Podobno analizo lahko naredimo za vezje s slike 1b. V enačbi za izračun upora R je sedaj tok I že tisti tok, ki ga kaže ampermeter I_A. Napetost na uporu U pa je napetost na voltmetru U_V, zmanjšana za napetost na ampermetru $U_A = R_A\,I_A$,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_V - R_A\,I_A}{I_A} = R' - R_A \tag{3}$$

in pri pogoju $R_A \ll R$:

$$R = R' = \frac{U_V}{I_A}\,. \tag{4}$$

Potek meritve Zveži električni krog po shemi s slike 1 in vstavi vanj najprej R = 100 kΩ in nato R = 2 kΩ. Iz vsake dvojice meritev napetost-tok določi po Ohmovem zakonu vrednost upora in nato popravljene vrednosti, ko upoštevaš upore obeh instrumentov. V tabelo vnesi vse izračunane vrednosti in velikost popravkov pri obeh primerih.

Notranji upor vira Napetost vira, skozi katerega ne teče tok, je *gonilna napetost*. V električnih krogih pogosto predpostavljamo, da je napetost vira neodvisna od tega, kolikšen tok teče po krogu. V resnici pa se napetostnim virom napetost zmanjša, ko skoznje teče tok, kar je zlasti opazno, če teče skozi vir večji tok. Vzrok za to je njihov notranji upor R_n. Napetost na priključkih vira U, ki jo lahko izmerimo, je gonilna napetost, zmanjšana za napetost na **notranjem uporu** R_n:

$$U = U_g - R_n I\,. \tag{5}$$

Odvisnost napetosti od toka ponazorimo s premico z naklonom $-R_n$, ki seka ordinatno os v točki U_g.

Za moč, ki se troši na porabniku, velja $P = UI$. Izrazimo I iz enačbe (5) in dobimo

$$P = UI = \frac{1}{R_n}\,U(U_g - U)\,. \tag{6}$$

Iz pogoja za ekstrem $\mathrm{d}P/\mathrm{d}U = (U_g - 2U)/R_n = 0$ sledi, da je moč na porabniku največja, ko je $U = \frac{1}{2}U_g$, in enaka $P_{\max} = U_g^2/4R_n$. Odvisnost $P(U)$ v enačbi (6) ponazorimo s parabolo, ki ima teme v točki $U = \frac{1}{2}U_g$ in seka abscisno os v točkah $U = 0$ in $U = U_g$.

Potek meritve Notranji upor in gonilno napetost izmeri tako, da pri različnih obremenitvah vira meriš napetost in tok (shema za vezavo je na sliki 1a). Meritve vnesi v graf $U(I)$ in iz naklona premice skozi točke odčitaj notranji upor, iz presečišča z ordinato pa gonilno napetost.

Pri vsaki meritvi napetosti in toka izračunaj še moč, ki se troši na uporniku, in jo vnesi v graf $P(U)$. Za primerjavo nariši še teoretično odvisnost (parabolo) (6).

3.2 Električno polje

Gaussov zakon Za vsako poljubno oblikovano ploskev velja *Gaussov zakon*:

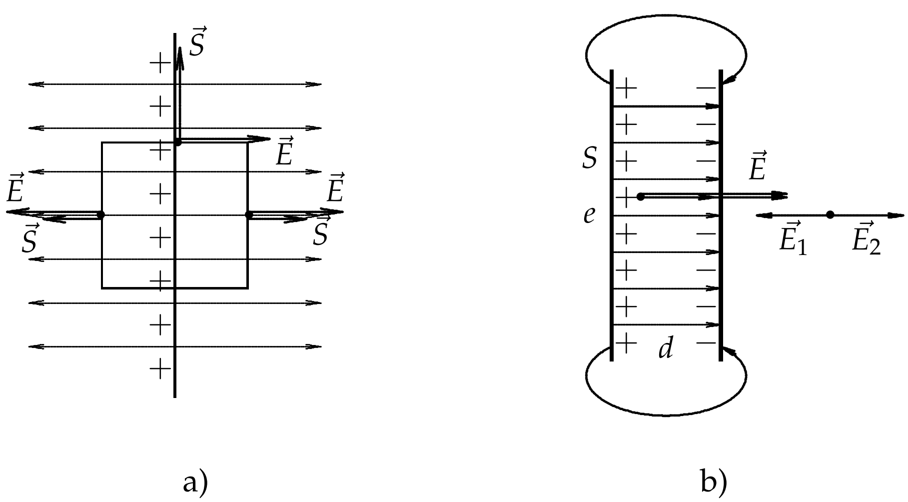
$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_0}, \tag{7}$$

pri čemer je e naboj znotraj ploskve. Uporabimo ga za računanje jakosti električnega polja neskončno velike ravne ploskve, po kateri je naboj enakomerno porazdeljen. Znana naj bo **ploskovna gostota naboja** $\sigma = e/S$, ki pove, koliko naboja je na ploskovni enoti. Iz simetrije problema pri enakomerno porazdeljenem naboju sklepamo, da je polje okrog ploskve homogeno in pri prehodu plošče samo menja predznak oz. smer.

Najprej izberemo *Gaussovo ploskev* (glej sliko 2a), ki naj bo v tem primeru pokončna prizma z osnovnima ploskvama, vzporednima z ravnino z nabojem. Pri tem integral $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ razpade v tri ploskovne integrale: integrala po osnovnih ploskvah in integral po plašču. Integral $\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ po plašču prizme je nič, saj je normala na to ploskev pravokotna na vektor polja $\vec{E}$, integrala po osnovnih ploskvah pa sta 2 krat $E\,S$ (glej sliko 2a). Iz Gaussovega zakona (7) sledi

$$E = \frac{e}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Iz enačbe razberemo, da je jakost električnega polja odvisna le od gostote naboje.



Slika 2: a) Gaussova ploskev, b) polje kondenzatorja.

Na podlagi tega lahko izračunamo tudi jakost električnega polja med dvema vzporednima neskončno velikima ploskvama s konstantno ploskovno gostoto naboja nasprotnih predznakov na obeh ploskvah (slika 2b). Polje med ploščama sestavljata prispevka obeh plošč $E_1 + E_2 = e/2\varepsilon_o S + e/2\varepsilon_o S$ ali

$$E = \frac{e}{\varepsilon_o S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \,. \tag{9}$$

Zunaj obeh plošč se prispevka izničita. Polja ni. Enačba velja tudi, če plošči nista neskončno veliki, če je le majhna razdalja med ploščama v primerjavi z dimenzijami plošč in v točkah ne prav blizu robov. Tedaj pomeni e celoten naboj na eni plošči, S pa velikost plošče. Takšen par plošč imenujemo ploščati **kondenzator**.

Zapišimo napetost med ploščama. Ker je polje med ploščama homogeno, da integriranje jakosti električnega polja po poti med ploščama v razdalji d

$$U = -\int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\, d \,, \tag{10}$$

če je za četna točka na negativni, končna pa na pozitivni plošči. S kombiniranjem te enačbe in enačbe (9) najdemo odvisnost naboja e od napetosti U na kondenzatorju

$$e = \frac{\varepsilon_o\, S}{d}\, U = C\, U \,. \tag{11}$$

Sorazmernostna konstanta je kondenzatorjeva **kapaciteta**

$$C = \frac{\varepsilon_o\, S}{d} \,. \tag{12}$$

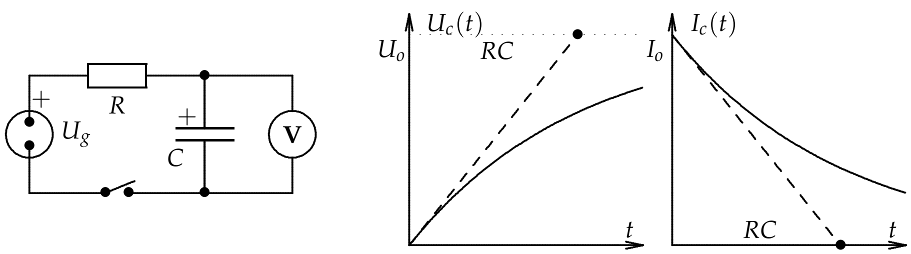
Potek meritve Pri merjenju naboja v odvisnosti od napetosti na kondenzatorju poskrbi, da ne pride napetost, s katero napajamo kondenzator, direktno na vhod merilnika. Zato z eno žico za hip pritisni na kondenzator napetost npr. 30 V, z drugo žico sprazni kondenzator prek merilnika in odčitaj naboj. Na enak način opravi še drugo meritev, pri kateri ugotovi odvisnost naboja na kondenzatorskih ploščah od razdalje med njima pri izbrani napetosti (npr. 30 V).

Polnjenje in praznjenje kondenzatorja Če kondenzator s kapaciteto C priključimo na vir napetosti U_g prek upornika R (glej sliko 3a), teče najprej velik tok, nato pa vse manjši. Z napetostjo na kondenzatorju pa je prav obratno, s časom se ta povečuje in doseže napetost vira. Časovni potek toka in napetosti dobimo iz enačbe, ki pove, da je skupna napetost vira U_g enaka vsoti napetosti na uporu in kondenzatorju:

$$U_g = U_R(t) + U_C(t) = R\,I(t) + \frac{e(t)}{C}\,. \tag{13}$$

Če enačbo odvajamo po času in upoštevamo, da je električni tok v časovni enoti pretečeni naboj, $I = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, dobimo $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t + I/R\,C = 0$ ali

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{\mathrm{d}t}{R\,C}\,. \tag{14}$$



Slika 3: a) Vezje pri polnjenju kondenzatorja. b) Grafa $U(t)$ in $I(t)$.

Po integraciji leve strani te enačbe od I_o do I in desne strani v časovnem intervalu od 0 do t dobimo $\ln(I/I_o) = -t/R\,C$, kar lahko preuredimo v

$$I(t) = I_o \mathrm{e}^{-t/RC}\,. \tag{15}$$

Tok v kondenzatorju pojema eksponentno (slika 3b). Hitrost pojemanja je odvisna od **časovne konstante** RC. Čim večji je ta produkt, tem daljši je čas, v katerem tok pade e-krat (osnova naravnih logaritmov $\mathrm{e} = 2,71\ldots$, ne zamenjaj z nabojem e!).

Napetost na kondenzatorju s časom postopno narašča: iz enačbe (13) in z upoštevanjem zveze $RI_o = U_g$ namreč dobimo

$$U_C(t) = U_g - U_R = U_g - I(t)R = U_g(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})\,. \tag{16}$$

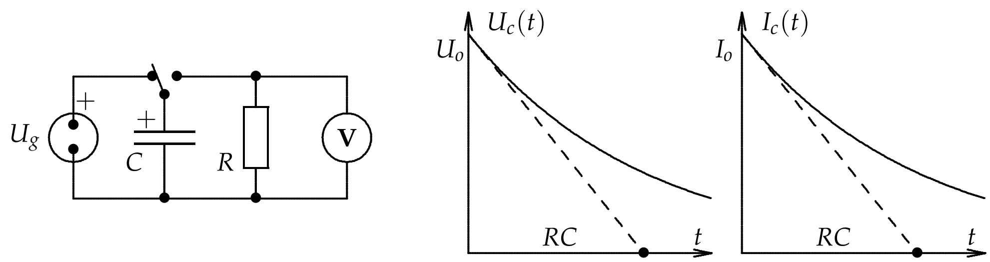
Podobno obravnavamo tudi **praznjenje kondenzatorja** skozi upornik. V tem primeru v enačbi (13) ni napetosti U_g, odvod enačbe je enak, kot v prejšnjem primeru, to je enačba (14). Rešitev te enačbe je enačba (15). Tudi v tem primeru se tok s časom eksponentno zmanjšuje. Na enak način se zmanjšujeta tudi obe napetosti, napetost na uporniku je $U_R(t) = -R\,I(t) = -R\,I_o e^{-t/RC}$ (tok teče v obratni smeri kot pri polnjenju) in na kondenzatorju je $U_C(t) = -U_R(t)$ ali

$$U_C(t) = U_g\,e^{-t/RC}. \tag{17}$$

O poteku praznjenja odloča produkt RC, to je časovna konstanta, ki smo jo uvedli pri polnjenju. Časovni odvod napetosti pri $t = 0$ je enak

$$\frac{dU(0)}{dt} = -\frac{U_o}{R\,C}. \tag{18}$$

To pomeni, da tangenta na eksponentno krivuljo v točki $t = 0$ seka abscisno os pri $t = RC$. Tako lahko iz grafa približno odčitamo časovno konstanto.



Slika 4: a) Vezje pri praznjenju kondenzatorja. b) Časovni grafi $U(t)$ in $I(t)$.

Zvezo (16) preuredimo $U_g - U_C(t) = U_g\,e^{-t/RC}$ in logaritmiramo

$$\ln\big(U_g - U_C(t)\big) = -\frac{1}{RC}\,t + \ln U_g\,, \tag{19}$$

ter podobno enačbo (17):

$$\ln U_C(t) = -\frac{1}{RC}\,t + \ln U_g\,. \tag{20}$$

Ugotovimo, da obe enačbi predstavljata premico z naklonom $-1/RC$. Pri natančnejšem določanju časovne konstante meritve napetosti na kondenzatorju vnesemo v graf, pri katerem na absciso nanašamo čas, na ordinato pa v primeru polnjenja kondenzatorja $\ln\big(U_g - U_C(t)\big)$, v primeru praznjenja pa $\ln U_C(t)$.

Potek meritve Kondenzator in uporovno dekado priključi na napetostni vir po shemi s slike 3a. Izberi takšno kombinacijo $R\,C$, da lahko zasleduješ polnjenje s štoparico in iz podatkov narišeš časovni graf $\ln\big(U_g - U_C(t)\big)$ ter določiš časovno konstanto. Spremeni vezavo po shemi s sliki 4a in na podoben način meri praznjenje kondenzatorja.

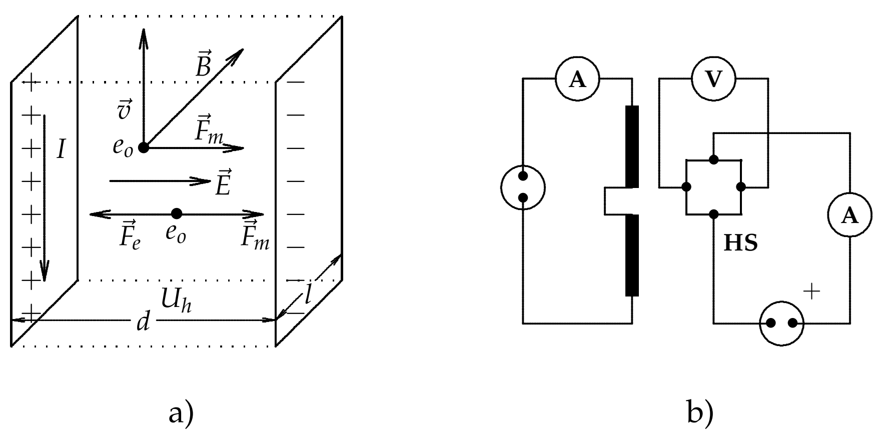
3.3 Magnetno polje

Hallova sonda Hallova sonda je vodnik (polprevodnik), v katerem je električni tok. Ko vstavimo sondo v magnetno polje tako, da stoji Hallov vodnik pravokotno na magnetno polje (glej sliko 5a), deluje na nosilce električnega toka (elektrone) magnetna sila, ki jih izriva na rob vodnika. Sila, ki deluje na elektron z nabojem $-e_o$, je $\vec{F}_m = -e_o\vec{v} \times \vec{B}$, kjer za hitrost vzamemo kar povprečno hitrost elektronov v kovini, ki jo določa električni tok. Na robu zbrani elektroni s predznakom minus in primanjkljaj elektronov na drugem robu s predznakom + s svojim električnim poljem v prečni smeri na smer električnega toka preprečujejo prečno gibanje elektronov. To gibanje preneha, ko se vzpostavi ravnovesje med električno silo $-e_o\vec{E}$ in magnetno silo $-e_o\vec{v} \times \vec{B}$. Tako dobimo zvezo $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$.

Nasprotnoimenski naboji, zbrani na nasprotnih ploskvah ob robu vodnika v razdalji d, spominjajo na razmere v kondenzatorju. Napetost med ploskvama imenujemo **Hallova napetost** in je enaka $U_H = E\,d = v\,d\,B$, ki se da izmeriti. Hitrost elektronov lahko izrazimo s tokom $I = e_o n_e\, v\, S$, kjer je $S = l\,d$ presek vodnika, n_e pa gostota elektronov. Tako je **Hallova napetost**

$$U_H = \frac{I\,B}{e_o\,n_e\,l} = K_H I\,B\,. \tag{21}$$

V enačbi je $K_H = 1/e_o\,n_e l$ **konstanta Hallove sonde**, ki jo lahko določimo eksperimentalno, tako da sondo umerimo z znanim magnetnim poljem.



Slika 5: a) Hallov pojav, b) Hallova sonda in tuljava z režo.

Potek meritve Po sliki 5b priključi Hallovo sondo na vir stabilizirane enosmerne napetosti. Dve enaki tuljavi, med katerima je reža, veži zaporedno. Tok skozi njiju lahko spreminjaš. Podatki o tuljavi so zapisani na tuljavi, z njimi in z izmerjenim tokom izračunaj gostoto magnetnega polja. Magnetno polje na sredini reže je enako

$$B = \frac{\mu_0 N_1 \, I}{\sqrt{l_1^2 + R^2}}\,, \tag{22}$$

pri čemer je N_1 število ovojev in l_1 dolžina *ene* tuljave. Izmeri še polmer R navitja na tuljavi.

Spreminjaj magnetno polje pri stalnem Hallovem toku 25 mA, nato pri najmočnejšem polju v tuljavi spremeni Hallov tok in izmeri Hallovo napetost. Iz naklona premice v grafu $U_h(B)$ in enačbe (21) izračunaj konstanto Hallove sonde.

Z umerjeno sondo izmeri tudi krajevno odvisnost gostote magnetnega polja v bližini tuljave, trajnih magnetov in feromagnetne ploščice.

Indukcijski zakon Če skozi zanko spreminjamo gostoto magnetnega polja tako, da je odvod $d\vec{B}/dt$ različen od nič, se v zanki inducira napetost. Tako zapišemo *indukcijski zakon*:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\vec{S} \cdot \vec{B}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}\,. \tag{23}$$

Če se magnetni pretok $\Phi_m = \vec{S} \cdot \vec{B}$ skozi zanko spreminja, bodisi zaradi spreminjanja gostote magnetnega polja, bodisi zaradi spreminjanja velikosti zanke ali orientacije zanke glede na gostoto magnetnega polja, se v zanki inducira napetost. Pove, da je inducirana napetost tem večja, čim večja je hitrost te spremembe.

Merjenje B z galvanometrom Indukcijski zakon $U_i = -\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t$ lahko zapišemo tudi v integralski obliki:

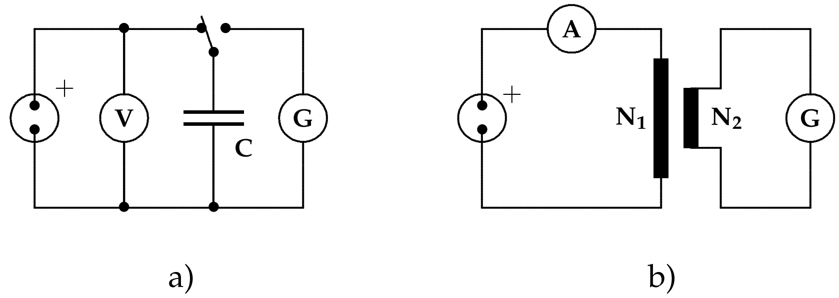
$$\int U_i \mathrm{d}t = -\Delta\Phi_m\,. \tag{24}$$

Če se spremeni magnetni pretok skozi zanko za $\Delta\Phi_m$, se v zanki inducira napetostni sunek $\int U_i \mathrm{d}t$

Pri poskusu imamo na skupnem jedru dve tuljavi. V prvi tuljavi ustvarja tok I_1 magnetno polje B_1 tako, da je drugi tuljavi (število navojev N_2, presek S_2) magnetni pretok $\Phi_m = N_2\, S_2\, B_1$. Prekinimo tok v prvi tuljavi! Tedaj se v drugi tuljavi inducira *napetostni sunek*, ki ga določa enačba (24). Če izrazimo napetost po Ohmovem zakonu s tokom, dobimo *tokovni sunek* $\int I_i \mathrm{d}t$, ki predstavlja inducirani naboj e, ki steče v drugi tuljavi (če je seveda tokokrog sklenjen): $\int U_i \mathrm{d}t = R \int I_i \mathrm{d}t = R\, e$. Desna stran enačbe (24) je sprememba magnetnega pretoka, to je razlika med končnim magnetnim pretokom Φ_k in prvotnim magnetnim pretokom Φ_z: $\Delta\Phi_m = N_2\, S_2\, B_1$, saj je $\Phi_k = 0$. Če to povežemo, najdemo enačbo za gostoto magnetnega polja

$$B_1 = \frac{R\, e}{N_2\, S}\,. \tag{25}$$

Inducira naboj v drugi tuljavi merimo z galvanometrom, ki ga moramo z znanim nabojem umeriti.



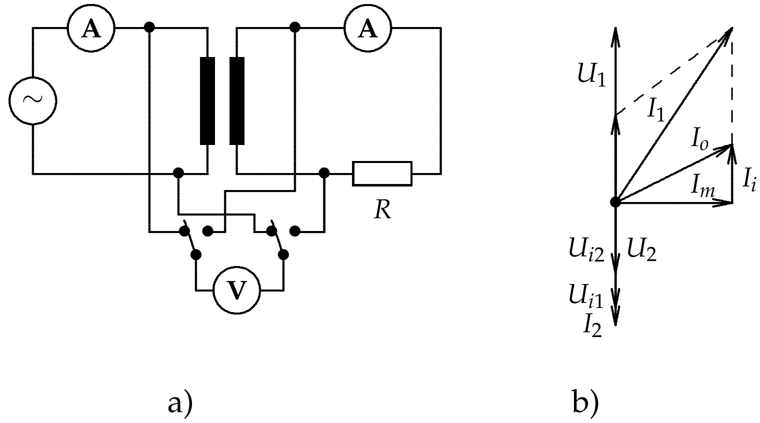
Slika 6: a) Umerjanje galvanometra z znanim nabojem, b) merjenje induciranega naboja.

Potek meritve Galvanometer najprej umeri z znanim nabojem, ki ga dobiš s praznjenjem kondenzatorja s kapaciteto C, priključenega na napetost U (slika 6b). Naboj na kondenzatorju je odvisen od napetosti na kondenzatorju in kapacitete kondenzatorja, $e = CU$. Nariši umeritveno krivuljo galvanometra, to je graf odvisnosti $e(\varphi)$, kjer je φ odčitek na galvanometru (kar v delcih).

S tako umerjenim galvanometrom izmeri tudi naboj, ki steče skozi galvanometer ob prekinitvi sklenjenega železnega jedra, v katerem je remanentni magnetizem kot ostanek prej ustvarjenega magnetnega polja (glej sliko 6b). Tokovni sunek (naboj) preberi na galvanometru kot število delcev, naboj pa ugotovi iz umeritvene krivulje. Za upor v krogu moramo upoštevati upor tuljave in galvanometra.

Z umerjenim galvanometrom za merjenje induciranega naboja lahko izmerimo tudi gostoto magnetnega polja v prvi tuljavi, ko prekinemo v njej tok in se v manjši tuljavi inducira napetostni sunek.

Transformator Dvoje tuljav, nasajenih na feromagnetno jedro (slika 7a), sestavlja *transformator*. Na primarno tuljavo priključimo vir izmenične napetosti. V sekundarni tuljavi se zaradi spremembe magnetnega polja v jedru inducira napetost, ki je tudi izmenična. Zaradi lastne indukcije se pojavi napetost tudi v primarni tuljavi. Najprej naj bo sekundarna tuljava nesklenjena. Tedaj teče v primarni tuljavi *magnetilni tok* I_m, ki prehiteva napetost za 90^o. Teče še dodatni tok zaradi izgub v transformatorskem jedru. Označimo ga z I_i, ki pa je v fazi z napetostjo U_1. Zato je *skupni tok* $I_o = \sqrt{I_m^2 + I_i^2}$ (glej sliko 7b).



Slika 7: a) Transformatorski tuljavi z jedrom. b) Kazalčni diagram tokov in napetosti.

Izračunajmo še obe inducirani napetosti. V sekundarni tuljavi se inducira napetost $U_{i2} = N_2 U_o$, pri čemer je N_2 število navojev te veje in U_o napetost, ki se inducira v enem navoju. Tolikšna napetost se inducira tudi v vsakem navoju primarne tuljave, zato je inducirana napetost na primarni strani $U_{i1} = N_1 U_o$. Ta napetost je enaka in nasprotna pritisnjeni napetosti na primarni tuljavi: $U_{i1} = -U_1$. Razmerje obeh napetosti predstavlja *transformatorsko enačbo za napetosti*,

$$\frac{U_{i2}}{U_{i1}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}\,, \tag{26}$$

V enačbi smo inducirano napetost na sekundarni tuljavi U_{i2} zamenjali kar s simbolom U_2, saj je to na tej tuljavi edina napetost (predznak smo opustili).

Transformator obremenimo s tem, da na sekundarno tuljavo priključimo upornik. V sekundarni tuljavi se pojavi tok I_2. Moč, ki jo dovedemo primarni tuljavi, mora biti vsaj tolikšna, kot je moč, ki se troši na sekundarni strani. Če so izgube majhne (kar pa slabo velja za majhne transformatorje), je $P_1 = U_1 I_1' = P_2 = U_2 I_2$. To da *transformatorsko enačbo za tokove*:

$$\frac{I_1'}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}\,. \tag{27}$$

Kjer je več navojev, je manjši tok in večja napetost in obratno. (Gl. kazalčni diagram tokov in napetosti na sliki 7b).

Potek meritve Sestavi transformator z merilniki po shemi na sliki 7a, v kateri je napetostni vir izmeničen. Najprej izmeri obe napetosti in tok v primarni tuljavi I_o pri neobremenjenem transformatorju. Preveri transformatorsko enačbo za napetosti. Nato na sekundarno tuljavo priključi upornik (npr. za 100 Ω), izmeri obe napetosti in oba tokova I_1' in I_2. Tok I_1, ki ga izračunaš iz transformatorske enačbe za tokove, se ne bo ujemal z izmerjenim tokom I_1'. Zato ugotovi razliko med izmerjeno in izračunano vrednostjo. Upoštevati bi morali še fazne kote med tokovi v kazalčnem diagramu (I_m, I_o in I_1'), ker niso v fazi. Spreminjaj upor na izhodu in ugotovi, kako se spreminja z obremenitvijo tok v primarni in sekundarni tuljavi!