

Matematične metode v fiziki II

B. Golli, PeF

8. september 2014

Kazalo

1 Navadne diferencialne enačbe (NDE)	5
1.1 Uvod	5
1.1.1 Diferencialne enačbe v fiziki	5
1.1.2 Sistemi NDE	6
1.1.3 Začetni pogoji	7
1.1.4 Klasifikacija NDE	7
1.1.5 Nekaj splošnih lastnosti NDE	8
1.1.6 Reševanje NDE	9
1.1.7 Zgledi	10
1.2 NDE 1. reda	11
1.2.1 Zgledi za enačbe 1. reda	11
1.2.2 Variacija konstant v primeru NDE 1. reda	11
1.3 NDE 2. reda	12
1.3.1 Prevedba na integral	12
1.3.2 Linearna NDE s konstantnimi koeficienti	13
1.3.3 Rešitev homogene linearne NDE s konstantnimi koeficienti	14
1.3.4 Reševanje nehomogene linearne NDE s konstantnimi koeficienti	15
1.4 Sistemi NDE 2. reda	18
1.4.1 Sklopljena nihala	18
1.4.2 Sistem enačb v primeru dveh teles	18
1.4.3 Iskanje lastnih frekvenc	18
1.4.4 Lastna nihanja v primeru dveh enakih sklopljenih nihala	19
1.4.5 Začetni pogoji v primeru sklopljenih nihala	20
1.4.6 Prosta (sklopljena) nihala	21
2 Fourierova analiza	23
2.1 Fourierova vrsta	23
2.2 Zapis v kompleksnem	25
2.3 Fourierov integral	26
3 Vektorski račun in parcialne diferencialne enačbe	29
3.1 Vektorska in skalarna polja v fiziki	29

3.2	Gradient	30
3.2.1	Pojem	30
3.2.2	Računanje gradienta	31
3.3	Fizikalni primeri enačb z gradientom	31
3.4	Divergenca	32
3.4.1	Ohranitveni zakoni in kontinuitetna enačba	32
3.4.2	Računanje divergence	33
3.5	Rotor	35
3.6	Brezvrtinčna in brezizvirna in polja	36
3.7	Osnovne enačbe matematične fizike	36
3.7.1	Drugi odvodi skalarnih polj	36
3.7.2	Difuzijska enačba	37
3.7.3	Reševanje PDE v primeru stacionarnih problemov	39
3.7.4	Zgledi	40
3.8	Valovna enačba za elektromagnetno polje	44
3.8.1	Maxwellove enačbe	44
3.8.2	Ohranitev naboja	44
3.8.3	Valovna enačba za EM polje	45
3.9	Valovanje v snovi	46
3.9.1	Substancialni odvod	46
3.9.2	Navier-Stokesova enačba	47
3.9.3	Valovna enačba za zvok	47
4	Verjetnostni račun in osnove statistike	49
4.1	Porazdelitve verjetnosti	49
4.1.1	Diskretne porazdelitve	49
4.1.2	Zvezne porazdelitve	49
4.1.3	Zvezne porazdelitve v več razsežnostih	50
4.2	Povprečja	51
4.2.1	Diskretne porazdelitve	51
4.2.2	Zvezne porazdelitve	52
4.3	Tri posebne verjetnostne porazdelitve	52
4.3.1	Enakomerna	52
4.3.2	EkspONENTNA	53
4.3.3	Gaussova	53
4.4	Transformacije spremenljivk	54
4.5	Binomska porazdelitev	54
4.6	Poissonova porazdelitev	57
4.7	Prehod na Gaussovo porazdelitev	58
4.8	Porazdelitev χ^2	60
4.8.1	Primerjava izmerjene in teoretične porazdelitve	60
4.8.2	Primerjava dveh izmerjenih porazdelitev	63
4.8.3	Preverjanje modelov pri merjenjih	63

Poglavje 1

Navadne diferencialne enačbe (NDE)

1.1 Uvod

1.1.1 Diferencialne enačbe v fiziki

Večina osnovnih enačb v fiziki je zapisana v obliki *diferencialne enačbe*. Za primer vzemimo kar 2. Newtonov zakon za premo gibanje

$$a = \frac{F}{m}.$$

Gibanje opišemo, če povemo, kako se hitrost in lega spreminjata s časom. Velja

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

in Newtonov zakon za neznanko x zapišemo kot

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f, \quad f = \frac{F}{m}.$$

Neznanka je „skrita“ v drugem odvodu, zato takšni enačbi pravimo *diferencialna enačba*. Ker nastopa drugi odvod, je enačba *drugega reda*.

Če je sila konstantna, rešitev že poznamo; gre za enakomerno pospešeno gibanje z rešitvijo

$$v(t) = ft + v_0, \quad x(t) = \frac{1}{2}ft^2 + v_0t + x_0. \quad (1.1)$$

(Namesto f seveda lahko zapišemo kar pospešek a .)

Težava se pojavi, če sila ni konstantna, ampak odvisna od hitrosti, lege ali časa. Zgled za silo, odvisno od hitrosti, je bodisi linearni upor ($F_u = 6\pi r\eta v$ za kroglico) bodisi kvadratni upor v sredstvu ($F_u = \frac{1}{2}c_u\rho S v^2$); zgled za silo, odvisno od lege, je prožnostna sila $F = -kx$ ali gravitacijska sila med dvema telesoma $F_g = Gm_1m_2/r^2$. V splošnem torej lahko zapišemo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(v, x, t)}{m} = f\left(\frac{dx}{dt}, x, t\right), \quad (1.2)$$

pri čemer smo v zadnjem koraku hitrost zapisali kot odvod lege po času. Zapisali smo splošno obliko enačbe 2. reda. Enačba povezuje drugi odvod odvisne spremenljivke (v našem primeru je to

lega x) s prvim odvodom odvisne spremenljivke, odvisno spremenljivko in neodvisno spremenljivko (v našem primeru je to čas t). V nadaljevanju bomo zapis posplošili na enačbo n -tega reda, ki povezuje n -ti odvod odvisne spremenljivke z neodvisno spremenljivko, odvisno spremenljivko in njenimi odvodi do $n - 1$ -tega odvoda.

V enostavnih primerih – obravnavali jih bomo v naslednjih poglavjih – je mogoče reševanje diferencialne enačbe prevesti na integriranje. V splošnem pa to ni mogoče in uporabiti moramo standardne prijeme za reševanje diferencialnih enačb. Nekaj teh si bomo ogledali v nadaljevanju. A ti prijemi delujejo le za posebne oblike NDE. Ko odpovedo, se zatečemo k numeričnemu reševanju.

Pri numeričnemu reševanju je dobrodošla nekoliko drugačna oblika zapisa enačbe. Poleg lege vzamemo za odvisno spremenljivko še hitrost in zapišemo:

$$\frac{dv}{dt} = f(v, x, t), \quad (1.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (1.4)$$

Druga zapisana enačba je pravzaprav definicija hitrosti. Formalno pa lahko zapis obravnavamo kot sistem dveh enačb prvega reda za dve (odvisni) spremenljivki.

1.1.2 Sistemi NDE

Sisteme linearnih enačb srečamo v fiziki tudi pri zapisu enačb gibanja v dveh ali treh razsežnostih. V tem primeru zapišemo Newtonov zakon z vektorji

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{f}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{r}, t\right).$$

V ravnini zapišemo vektorje s komponentami $\vec{r} = (x, y)$ in $\vec{F} = (F_x, F_y)$. Koordinati x in y sta sedaj dve odvisni spremenljivki in naloga zahteva, da za obe poiščemo časovno odvisnost. Dobimo dve enačbi drugega reda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_x\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right), \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f_y\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, x, y, t\right). \quad (1.6)$$

Enačbi sta sklopljeni, saj (prva) enačba za x vsebuje tudi spremenljivko y in njen odvod, prav tako kot enačba za y vsebuje x in njen odvod. Podobno kot smo to naredili na koncu prejšnjega razdelka, lahko tudi vsako od teh enačb zapišemo kot sistem dveh enačb prvega reda za štiri neznane količine x, y, v_x, v_y .

$$\frac{dv_x}{dt} = f_x(v_x, v_y, x, y, t),$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = f_y(v_x, v_y, x, y, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y. \quad (1.7)$$

Za zgled vzemimo poševni met z upoštevanjem zračnega upora. Sila je v tem primeru odvisna od kvadrata hitrosti $F_u = \frac{1}{2}c_u\rho S v^2$. Ampak silo moramo zapisati kot vektor. Kaže v nasprotni smeri hitrosti, torej

$$\vec{F}_u = \frac{1}{2}c_u\rho S v^2 \left(-\frac{\vec{v}}{v}\right) = -\frac{1}{2}c_u\rho S v \vec{v} = -\frac{1}{2}c_u\rho S \sqrt{v_x^2 + v_y^2} (v_x, v_y).$$

V vodoravni smeri je to edina sila:

$$f_x = -k\sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x, \quad k = \frac{c_u\rho S}{2m},$$

v navpični smeri pa deluje še teža mg v smeri navzdol:

$$f_y = -g - k\sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y.$$

Izraza vstavimo v (1.7) in dobimo priročno obliko, primerno za numerično reševanje.

1.1.3 Začetni pogoji

Že iz oblike rešitve najbolj preproste enačbe 2. reda vidimo, da je rešitev odvisna od dveh parametrov v_0 in x_0 ; če izberemo drugačno začetno hitrost ali odmik, dobimo drugačno rešitev za časovno odvisnost hitrosti in odmika. Če hočemo torej dobiti enolično rešitev, moramo pri problemu povedati njuni vrednosti. Navedemo *začetna pogoja*. V nekoliko bolj formalni obliki, ko namesto hitrosti pišemo odvod odmika, lahko pogoja zapišemo:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_0, \quad (1.8)$$

$$x(t=0) = x_0. \quad (1.9)$$

Da bo rešitev enolična, moramo torej poznati funkcijo in njen odvod ob začetnem času (običajno je to kar čas 0). Zato govorimo o *začetnih pogojih*.

Zgornji razmislek velja za enačbo drugega reda. V splošnem velja, da moramo navesti toliko začetnih pogojev, kolikor je red enačbe. Pri enačbi prvega reda zadošča en sam pogoj: navesti moramo le vrednost spremenljivke ob začetnem času.

1.1.4 Klasifikacija NDE

- **red enačbe:** Kot smo že povedali, red enačbe določa najvišji odvod.
- **homogene in nehomogene enačbe:** Če v enačbi ne nastopa člen, ki bi vseboval le neodvisno spremenljivko, pravimo, da je enačba *homogena*; če je prisoten tak člen, je enačba *nehomogena*. V primeru enačbe (1.2) pomeni, da v primeru homogene enačbe nastopajo le sile, odvisne od hitrosti in/ali odmika; če se pojavi še sila, ki je odvisna od čas (lahko je tudi konstantna), pa je enačba nehomogena/

- **linearne in nelinearne enačbe:** Če se v enačbi pojavlja odvisna spremenljivka in njeni odvodi linearno (tj. v prvi potenci), je enačba *linearna*, sicer je *nelinearna*. Če je v primeru Newtonovega zakona sila odvisna linearno od odmika – tako kot pri prožnostni sili – ali od hitrosti – kot pri linearnem zakonu upora – je enačba linearna; v primeru kvadratnega upora, pa je nelinearna.

Za linearne enačbe veljata pomembna lastnosti:

- Poljubna linearna kombinacija rešitev linearne NDE je tudi rešitev enačbe.
- Splošno rešitev linearne NDE n -tega reda zapišemo kot linearno superpozicijo n bazičnih rešitev. Zgled: bazični rešitvi Newtonovega zakona za nihanje sta $x_1(t) = \sin(\omega t)$ in $x_2(t) = \cos(\omega t)$. Splošno rešitev torej zapišemo kot

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

pri čemer sta A in B poljubna koeficienta. Določimo ju iz začetnih pogojev.

1.1.5 Nekaj splošnih lastnosti NDE

V tem razdelku bom neodvisno spremenljivko pisali kot x , odvisno (iskano funkcijo) pa z y .

- **Splošna oblika**

$$\frac{d^n y(x)}{d^n x} = F \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}(x), \frac{d^2 y(x)}{d^2 x}, \dots, \frac{d^{n-1} y(x)}{d^{n-1} x} \right) \quad (1.10)$$

n ... red NDE

- **Linearne enačbe:**

$$\frac{d^n y(x)}{d^n x} = -\alpha_0(x)y(x) - \alpha_1(x)\frac{dy(x)}{dx}(x) - \alpha_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d^2 x} \dots - \alpha_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y(x)}{d^{n-1} x} + f(x) \quad (1.11)$$

- **Homogena NDE**

$$f(x) = 0 \quad (1.12)$$

- **Nehomogena NDE**

$$f(x) \neq 0 \quad (1.13)$$

- **Linearne enačbe s konstantnimi koeficienti:** Vsi koeficienti α v (1.11) so neodvisni od x

$$\frac{d^n y(x)}{d^n x} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y(x)}{d^{n-1} x} \dots + \alpha_2 \frac{d^2 y(x)}{d^2 x} + \alpha_1 \frac{dy(x)}{dx}(x) + \alpha_0 y(x) = f(x) \quad (1.14)$$

- **Začetni pogoji:** Enolično rešitev enačbe določa n začetnih pogojev (n je red NDE). Običajno jih zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} y(x = x_0) &= y_0 \\ \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_0} &= y_1 \\ \left. \frac{d^2y(x)}{d^2x} \right|_{x=x_0} &= y_2 \\ &\dots \\ \left. \frac{d^{n-1}y(x)}{d^{n-1}x} \right|_{x=x_0} &= y_{n-1} \end{aligned}$$

Za x_0 lahko pogosto izberemo kar 0.

1.1.6 Reševanje NDE

- **Prevedba na integral:** NDE oblike

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y)g(x) \quad (1.15)$$

lahko takoj prevedemo na integral

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^x g(x) dx \quad (1.16)$$

Začetni pogoj je vsebovan v spodnjih mejah integralov na desni in na levi: $y(x_0) = y_0$.

- **Linearna homogena NDE s konstantnimi koeficienti:** Izberemo nastavek $e^{\lambda x}$, vstavimo v NDE in dobimo navadno enačbo n -tega reda za parameter λ

$$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \dots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (1.17)$$

Enačba je vedno rešljiva v kompleksnem, dobimo n rešitev za parameter λ , bazične rešitve so

$$\varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Splošno rešitev zapišemo

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x} \quad (1.19)$$

Koeficiente A_i dobimo iz n začetnih pogojev.

- **Linearna nehomogena NDE:** Rešitev napišemo kot vsoto rešitve homogene enačbe (t.j. enačbe brez nehomogenega člena $f(x)$) in *partikularne rešitve* nehomogene enačbe:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) \quad (1.20)$$

$y_P(x)$ je katera koli rešitev nehomogene enačbe in v splošnem ne zadošča začetnim pogojem.

Za nehomogeno enačbo s konstantnimi koeficienti rešitev zapišemo

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + A_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x} + y_p(x) \quad (1.21)$$

Koeficiente A_i določimo iz začetnih pogojev. Koeficiente določimo šele po tem, ko smo že dodali partikularno rešitev.

Partikularno rešitev bodisi uganemo bodisi uporabimo katero od bolj sofisticiranih metod, ki bodo predstavljene kasneje.

- **Numerične metode**

1.1.7 Zgledi

- **Reševanje nehomogene NDE s konstantnimi koeficienti**

$$y'' = 4y' - 3y + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (1.22)$$

Ugotovimo, da gre za enačbo 2. reda, linearno, nehomogeno ($f(x) = 1$) s konstantnimi koeficienti. Homogeni del, $y'' - 4y' + 3y = 0$ rešujemo z nastavkom $y(x) = e^{\lambda x}$. Dobimo kvadratno enačbo za λ :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0, \quad (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1. \quad (1.23)$$

Dobimo dve bazični rešitvi $y_1(x) = e^{3x}$ in $y_2(x) = e^x$, in splošna rešitev homogene ima obliko

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^x \quad (1.24)$$

Partikularno rešitev nehomogene enačbe ugibamo, poskusimo kar z nastavkom $y_p(x) = a$. Ker sta prvi in drugi odvod konstante enaka 0, dobimo

$$3a = 1, \quad y_p(x) = \frac{1}{3}. \quad (1.25)$$

Splošna rešitev ima torej obliko

$$y(x) = Ae^{3x} + Be^x + \frac{1}{3}. \quad (1.26)$$

Koeficienta A in B določimo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} y(x)|_{x=0} &= Ae^{3x} + Be^x + \frac{1}{3} \Big|_{x=0} = A + B + \frac{1}{3} = 0, \\ y'(x)|_{x=0} &= 3Ae^{3x} + Be^x \Big|_{x=0} = 3A + B = 0. \end{aligned}$$

Hitro ugotovimo $A = \frac{1}{6}$ in $B = -\frac{1}{2}$, torej

$$y(x) = \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{3}. \quad (1.27)$$

1.2 NDE 1. reda

1.2.1 Zgledi za enačbe 1. reda

- **Zaporedno vezana kondenzator in upornik:** Zapišemo 2. Kirchhoffov izrek $U_g = U_C + U_R$. Vemo $U_C = e/C$ in $U_R = IR$. Enačbo $U_g = U_C + U_R$ odvajamo po času

$$\frac{dU_g(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{de}{dt} + R \frac{dI}{dt}. \quad (1.28)$$

Upoštevamo $\frac{de}{dt} = I$, preuredimo in dobimo

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = \frac{1}{R} \frac{dU_g(t)}{dt}. \quad (1.29)$$

- **Zaporedno vezana tuljava in upornik:** Zapišemo 2. Kirchhoffov izrek $U_g = U_L + U_R$. Vemo $U_L = L \frac{dI}{dt}$ in $U_R = IR$. Preuredimo in dobimo

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{1}{L} U_g(t). \quad (1.30)$$

1.2.2 Variacija konstant v primeru NDE 1. reda

Rešitev nehomogene linearne enačbe 1. reda

$$\frac{dy}{dx} + \beta y = f(x) \quad (1.31)$$

zapišemo kot vsoto rešitve homogene enačbe in partikularne rešitve

$$y(x) = Ae^{-\beta x} + y_p(x). \quad (1.32)$$

Partikularno rešitev dobimo v splošnem z variacijo konstante A ; pri tem dopustimo, da je A odvisna od x :

$$y_p(x) = A(x) e^{-\beta x}. \quad (1.33)$$

Nastavek nesemo v (1.31) in po preureditvi dobimo

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x) e^{\beta x}, \quad (1.34)$$

z rešitvijo

$$A(x) = \int f(x) e^{\beta x} dx \quad \text{in} \quad y_p(x) = e^{-\beta x} \int f(x) e^{\beta x} dx, \quad (1.35)$$

pri tem konstanto C , do katere je integral nedoločen, postavimo na 0, saj zadošča, da najdemo katero koli rešitev partikularne enačbe.

Zgled: Na zaporedno vezana kondenzator in upornik priključimo na izmenično napetost $U_g = U_0 \sin \omega t$. Za ta primer smo izpeljali:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = \frac{1}{R} \frac{dU_g}{dt} = \frac{\omega U_0}{R} \cos \omega t. \quad (1.36)$$

Partikularno rešitev dobimo iz (1.35)

$$I_p(t) = e^{-\beta t} \frac{\omega U_0}{R} \int \cos \omega t e^{\beta t} dt, \quad \beta = \frac{1}{RC}. \quad (1.37)$$

V matematičnem priročniku (ali kako drugače) najdemo

$$\int \cos \omega t e^{\beta t} dt = \frac{e^{\beta t}}{\omega^2 + \beta^2} (\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t) = \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \delta), \quad (1.38)$$

pri čemer smo vpeljali $\cos \delta = \omega / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ in $\sin \delta = \beta / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, oz. $\tan \delta = \beta / \omega$. Končno

$$I_p(t) = \frac{\omega U_0}{R \sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \delta) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \delta). \quad (1.39)$$

Izraz $Z \equiv \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$ je *impedanca* zaporedno vezanih R in C . Splošna rešitev naše naloge je torej:

$$I(t) = A e^{-\beta t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \delta). \quad (1.40)$$

Konstanto A določimo iz začetnega pogoja. Prvi člen (tj. rešitev homogene enačbe) postane po dovolj dolgem času zanemarljivo majhen in ostane le partikularna rešitev. Prvi člen ustreza t.i. *prehodnemu pojavu*.

1.3 NDE 2. reda

1.3.1 Prevedba na integral

Kot zgled vzemimo 2. Newtonov zakon za premo gibanje

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F(t, x, v)}{m} \equiv f(t, x, v). \quad (1.41)$$

Enačbo lahko prevedemo na integral v primerih (glej Matematične metode v fiziki I):

- $f = f(t)$:

$$v(t) = \int_0^t f(t) dt + v_0, \quad x(t) = \int_0^t v(t) dt + x_0. \quad (1.42)$$

- $f = f(v)$

$$\frac{dv}{dt} = f(v), \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int dt, \quad G(v) = t. \quad (1.43)$$

$$v(t) = G^{-1}(t), \quad x(t) = \int_0^t v(t) dt + x_0. \quad (1.44)$$

- $f = f(x)$

$$\frac{dv}{dt} = f(x), \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad dt = \frac{dx}{v}, \quad v \frac{dv}{dx} = f(x). \quad (1.45)$$

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \mathcal{I}(x), \quad v \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\mathcal{I}(x)}, \quad (1.46)$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\mathcal{I}(x)}} = \int_0^t dt, \quad \mathcal{G}(x) = t, \quad x(t) = \mathcal{G}^{-1}(t), \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1.47)$$

Na integral lahko prevedemo še izraze tipa $f(v, t) = g(v)h(t)$, a ti primeri niso fizikalno zanimivi.

1.3.2 Linearna NDE s konstantnimi koeficienti

Splošno enačbo te vrste zapišemo v obliki

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f(t). \quad (1.48)$$

Zgled iz mehanike: Na vzmeti s konstanto k visi kroglica z maso m radijem r . Kroglico potopimo v viskozno tekočino z viskoznostjo η ; odmaknemo iz mirovne lege in spustimo. Velja Newtonov zakon:

$$ma = F_g - F_v - kv - 6\pi r\eta v, \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + 6\pi r\eta \frac{dx}{dt} + kx = F_g - F_v. \quad (1.49)$$

Enačbo delimo z m in identificiramo ($s = x$):

$$\beta = \frac{3\pi r\eta}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f(t) = \frac{F_g - F_v}{m}. \quad (1.50)$$

Zgled iz elektrike: Na zaporedno vezane kondenzator, tuljavo in upornik priključimo vir z gonilno napetostjo $U_g(t)$. Drugi Kirchhoffov izrek pove

$$U_g = \frac{e}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI. \quad (1.51)$$

Enačbo najprej odvajamo, nato pa delimo z L . Po preureditvi dobimo

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{dU_g}{dt}. \quad (1.52)$$

Identificiramo

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad f(t) = \frac{1}{L} \frac{dU_g}{dt}. \quad (1.53)$$

1.3.3 Rešitev homogene linearne NDE s konstantnimi koeficienti

Homogeni del (1.62) rešimo z nastavkom $e^{\lambda t}$. Dobimo kvadratno enačbo za λ z rešitvijo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.54)$$

Ločiti moramo primere

- $\beta > \omega_0$ (*nadkritično dušenje*) Obe rešitvi sta negativni, $\lambda_{1,2} < 0$, splošno rešitev za s zapišemo kot

$$s(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}. \quad (1.55)$$

Parametra A in B določimo iz začetnih pogojev, tj. odmika in hitrosti ob začetnem času.

- $\beta < \omega_0$ (*podkritično dušenje*) V tem primeru ni rešitve za λ v realnem obsegu; obstaja pa rešitev v kompleksnem:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega', \quad \omega' \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (1.56)$$

in rešitev zapišemo kot

$$s(t) = A' e^{(-\beta+i\omega')t} + B' e^{(-\beta-i\omega')t} = e^{-\beta t} (A' e^{i\omega' t} + B' e^{-i\omega' t}). \quad (1.57)$$

Zanimajo nas samo *realne* rešitve, kar pomeni, da sta koeficienta A' in B' kompleksna, a izbrana tako, da je končni izraz realen. Upoštevamo $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$ in dobimo

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-\beta t} (A' (\cos \omega' t + i \sin \omega' t) + B' (\cos \omega' t - i \sin \omega' t)) \\ &= e^{-\beta t} ((A' + B') \cos \omega' t + i(A' - B') \sin \omega' t). \end{aligned}$$

Izberemo $A' = \frac{1}{2}(A - iB)$ in $B' = \frac{1}{2}(A + iB)$, pri čemer sta A in B dve poljubni *realni* števili. Dobimo

$$s(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t). \quad (1.58)$$

Rešitev je *realna*. Parametra A in B določimo iz začetnih pogojev, tako kot v prejšnjem primeru.

- $\beta = \omega_0$ (*kritično dušenje*) V tem primeru se zdi, da obstaja le ena sama bazična rešitev, $e^{-\beta t}$, a se lahko hitro prepričamo, da enačbo $\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \beta^2 s = 0$ reši tudi nastavek $t e^{-\beta t}$. Splošna rešitev je

$$s(t) = A e^{-\beta t} + b t e^{-\beta t}. \quad (1.59)$$

Zgled: Telo na začetku odmaknemo za s_0 in spustimo. Začetna pogoja sta $s(t=0) = s_0$ in $v(t=0) = 0$:

$$s(t=0) = A = s_0, \quad (1.60)$$

$$v(t=0) = \frac{ds}{dt} = -\beta A e^{-\beta t} + b e^{-\beta t} - \beta b t e^{-\beta t} \Big|_{t=0} = -\beta A + b = 0, \quad b = \beta A = \beta s_0$$

$$s(t) = s_0 e^{-\beta t} (1 + \beta t). \quad (1.61)$$

1.3.4 Reševanje nehomogene linearne NDE s konstantnimi koeficienti

Nehomogeno linearno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti smo zapisali v obliki

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f(t). \quad (1.62)$$

Splošno rešitev je

$$s(t) = s_H(t) + s_P(t) \quad (1.63)$$

pri čemer je $s_H(t)$ rešitev homogene enačbe in smo jo za različne primere ($\beta > \omega_0$, $\beta < \omega_0$ in $\beta = \omega_0$) zapisali v prejšnjem razdelku.

Tu se posvetimo iskanju *partikularne rešitve*, $s_P(t)$. Metoda variacije konstant, ki smo jo spoznali pri enačbah 1. reda je v tem primeru zamudna, in je ne bomo obravnavali. Ogleдали si bomo dva posebna primera, ko je $f(t)$ konstanta in ko je $f(t)$ harmonična. Drugi primer lahko s Fourierevo metodo razširimo na poljubno funkcijo $f(t)$.

Konstanta $f(t) = f_0$

V tem primeru poskusimo z nastavkom $s(t) = s'(t) + s_0$. Nastavek vstavimo v (1.62) in dobimo

$$\frac{d^2s'}{dt^2} + 2\beta \frac{ds'}{dt} + \omega_0^2 (s' + s_0) = f_0, \quad (1.64)$$

saj konstantni člen s_0 pri odvajanju odpade. Če za s_0 izberemo

$$s_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad (1.65)$$

se nehomogeni člen f_0 okrajša s $\omega_0^2 s_0$ na levi, in ostane *homogena* enačba za $s'(t)$. Vidimo, da je v tem primeru (1.65) kar iskana partikularna rešitev.

V posebnem primeru nihala na vzmet je $f_0 = F/m$, pri čemer je F konstantna sila, ki deluje na telo na vzmeti (recimo teža F_g ali razlika teže in vzgona. Tedaj velja

$$s_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k}, \quad (1.66)$$

saj je $\omega_0^2 = k/m$. Izraz F/k je ravno raztezek vzmeti, če nanj deluje konstantna sila F . Pomeni, da nihalo niha okoli nove ravnovesne lege; $s'(t)$ je rešitev *homogene* enačbe in ustreza odmiku nihala, merjenem glede na novo ravnovesno lego.

Harmonična $f(t)$

Oglejmo si primera $f(t) = f_0 \cos \omega t$ in $f(t) = f_0 \sin \omega t$. Zunanja sila se torej sinusno spreminja s krožno frekvenco ω , $F_0 = m f_0$ je njena amplituda.

Reševanje se bistveno poenostavi, če enačbo rešujemo v *kompleksnem* in za nehomogeni člen izberemo $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$. Ker je nehomogeni člen kompleksen, je tudi rešitev za $s(t)$ *kompleksna*. Da bi razumeli pomen kompleksne rešitve, zapišimo iskano partikularno rešitev kot

$$s(t) = x(t) + iy(t), \quad (1.67)$$

pri čemer sta $x(t)$ in $y(t)$ realni funkciji. Izraz (1.67) vstavimo v (1.62). Dobimo (odvajanje po času pišemo s piko):

$$\ddot{x}(t) + i\dot{y}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + 2i\beta\dot{y}(t) + \omega_0^2 x(t) + i\omega_0^2 y(t) = f_0 e^{-i\omega t} = f_0 \cos \omega t - i f_0 \sin \omega t, \quad (1.68)$$

saj so i , β in ω_0 konstante. Kompleksna enačba zahteva, da je enakost izpolnjena posebej za realni in imaginarni del. Dobimo dve enačbi

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos \omega t, \quad (1.69)$$

$$\dot{y}(t) + 2\beta\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = -f_0 \sin \omega t. \quad (1.70)$$

Realni del kompleksne rešitve (tj. funkcija $x(t)$) je partikularna rešitev enačbe (1.62), pri kateri za nehomogeni člen vzamemo $f(t) = f_0 \cos \omega t$, imaginarni del ($y(t)$) pa partikularna rešitev z nehomogenim členom $-f_0 \sin \omega t$.

Enačbo

$$\ddot{s}(t) + 2\beta\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = f_0 e^{-i\omega t} \quad (1.71)$$

rešujemo z nastavkom $s_p(t) = u e^{-i\omega t}$, pri čemer je u kompleksno število, neodvisno od časa. Velja $\dot{s}(t) = (-i\omega) u e^{-i\omega t}$ in $\ddot{s}(t) = (-i\omega)^2 u e^{-i\omega t} = -\omega^2 u e^{-i\omega t}$. Dobimo

$$-\omega^2 u e^{-i\omega t} - 2i\beta\omega u e^{-i\omega t} + \omega_0^2 u e^{-i\omega t} = f_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.72)$$

Časovno odvisni člen $e^{-i\omega t}$ se okrajša in za u dobimo enačbo

$$u = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \quad (1.73)$$

končni izraz smo dobili tako, da smo števec in imenovalc pomnožili s $\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega$. Kompleksno število u zapišimo v polarni obliki

$$u = |u| e^{i\delta}, \quad |u| = \sqrt{uu^*}, \quad \tan \delta = \frac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u}, \quad (1.74)$$

pri čemer je $\operatorname{Im} u$ imaginarni del števila u (tj. člen, ki stoji pri i), $\operatorname{Re} u$ pa njegov realni del. Dobimo

$$|u| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.75)$$

Partikularna rešitev (1.71) je tako

$$s_p(t) = |u| e^{i\delta} e^{-i\omega t} = |u| e^{-i(\omega t - \delta)} = |u| \cos(\omega t - \delta) - i |u| \sin(\omega t - \delta) \equiv x(t) + i y(t). \quad (1.76)$$

Iz enačb (1.69) in (1.70) sledi, da je prvi člen partikularna rešitev nehomogene enačbe z $f(t) = f_0 \cos \omega t$ in drugi enačbe z $f(t) = -f_0 \sin \omega t$.

Celotno rešitev enačbe

$$\ddot{s}(t) + 2\beta\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = f_0 \cos \omega t \quad (1.77)$$

torej lahko zapišemo kot

$$s(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta); \quad (1.78)$$

enačbe

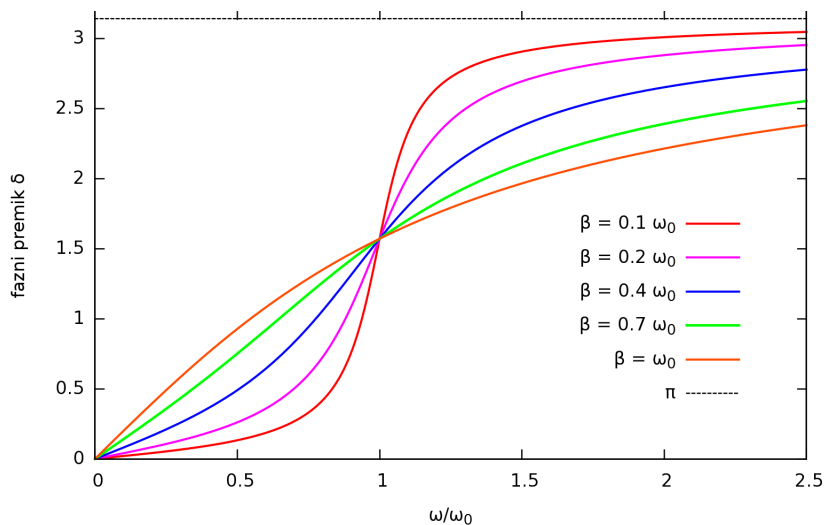
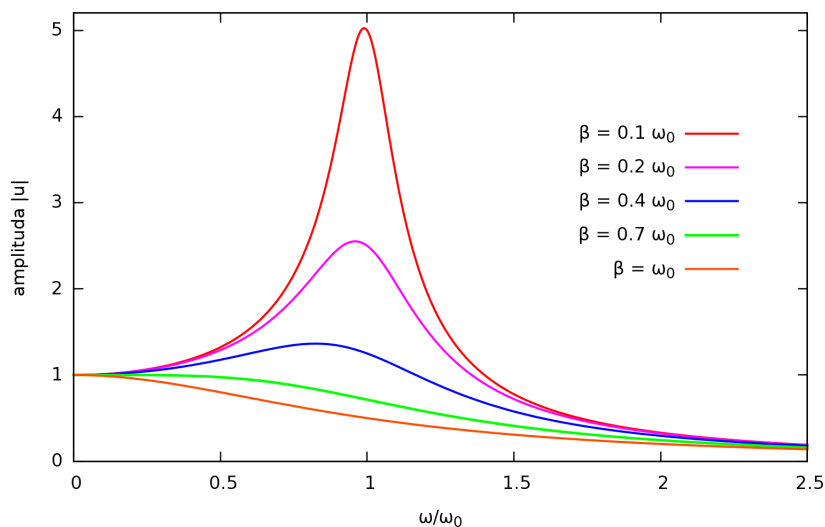
$$\ddot{s}(t) + 2\beta \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = f_0 \sin \omega t \quad (1.79)$$

pa kot

$$s(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega' t + B \sin \omega' t) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \delta). \quad (1.80)$$

Fazni kot δ dobimo iz (1.75). Homogeni del smo zapisali za primer $\omega_0 > \beta$; če to ni izpolnjeno, vzamemo eno od drugih dveh rešitev, ki smo jih zapisali v prejšnjem poglavju. Konstanti A in B določimo iz začetnih pogojev.

Homogeni del v (1.78) in (1.80) po dovolj dolgem času $t \gg \beta^{-1}$ izzveni in ostane le drugi člen. Prvi člen (homogena rešitev) ustreza *prehodnim pojavom*, drugi člen (partikularna rešitev) pa *vsiljenemu nihanju*.



1.4 Sistemi NDE 2. reda

1.4.1 Sklopljena nihala

Omejimo se sisteme linearnih NDE 2. reda s konstantnimi koeficienti. Fizikalni zgled so sklopljena nihala. Privzeli bomo še, da so nihala nedušena.

Enostaven zgled za tak sistem sta dve telesi (jahača) na zračni drči. Prvo telo z maso m_1 naj bo z vzmetjo s koeficientom k_1 povezano z levim krajiščem drče, drugo z maso m_2 pa prek vzmeti s k_2 z desnim krajiščem. Telesi povežemo (sklopimo) s tretjo vzmetjo s konstanto k' .

V splošnem sistem niha z več frekvencami, ki zaradi sklopitve niso enake frekvencam nesklopljenega sistema (v našem primeru sta to frekvenci $\sqrt{k_1/m_1}$ in $\sqrt{k_2/m_2}$). Če telesi zanihamo na točno določen način (tj. pri izbranih začetnih odmikih in hitrostih), pa lahko dosežemo, da telesi nihata z enako frekvenco. V tem primeru govorimo o *lastni frekvenci*, nihanje pa je *lastno nihanje*. Sistem lahko niha na več lastnih načinov; v nadaljevanju bomo pokazali, da pri linearnem sistemu nihal obstaja toliko lastnih nihanj, kolikor je v sistemu teles. Splošno nihanje sistema zapišemo kot *linearno superpozicijo lastnih nihanj*.

1.4.2 Sistem enačb v primeru dveh teles

Zapišimo enačbi gibanja za opisani sistem na zračni drči. Prvo telo odmaknimo za s_1 iz njegove mirovne lege, drugo za s_2 iz njegove mirovne lege; naj bo $s_2 > s_1$, tako da je srednja vzmet raztegnjena. Na prvo telo tedaj deluje sila prve vzmeti $-k_1s_1$ v levo (zato $-$) in sila srednje vzmeti $k'(s_2 - s_1)$ v desno. Podobno ugotovimo, da deluje na drugo telo sila $-k_2s_2$ v levo in sila $-k'(s_2 - s_1)$ prav tako v levo:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -k_1 s_1 + k'(s_2 - s_1), \\ m_2 a_2 &= -k_2 s_2 - k'(s_2 - s_1). \end{aligned} \quad (1.81)$$

1.4.3 Iskanje lastnih frekvenc

Rešitev za lastna nihanja iščemo z nastavkom

$$s_1(t) = s_{01} \cos(\omega t + \delta_1), \quad s_2(t) = s_{02} \cos(\omega t + \delta_2), \quad (1.82)$$

Ker iščemo lastna nihanja, smo v nastavku vzeli, da nihali nihata z enako frekvenco ω . Nastavek vstavimo v sistem (1.81) in upoštevamo

$$a_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} s_{01} \cos(\omega t + \delta_1) = -\omega^2 s_{01} \cos(\omega t + \delta_1) = -\omega^2 s_1(t), \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 s_1 + k_1 s_1 - k'(s_2 - s_1) &= 0, \\ -m_2 \omega^2 s_2 + k_2 s_2 + k'(s_2 - s_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Dobili smo sistem dveh navadnih linearnih enačb za s_1 in s_2 . Sistem prepisemo v matrično obliko

$$\begin{vmatrix} k_1 + k' - m_1 \omega^2 & -k' \\ -k' & k_2 + k' - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.85)$$

Sistem je *homogen* in za takšen sistem vedno obstaja *trivialna* rešitev, tj. rešitev $s_1 = s_2 = 0$. Zanima nas seveda *netrivialna* rešitev, ta pa obstaja le v primeru, ko je determinanta matrike sistema enaka 0:

$$\det \begin{vmatrix} k_1 + k' - m_1\omega^2 & -k' \\ -k' & k_2 + k' - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = (k_1 + k' - m_1\omega^2)(k_2 + k' - m_2\omega^2) - k'^2 = 0. \quad (1.86)$$

Dobimo enačbo:

$$m_1m_2(\omega^2)^2 - (m_1(k_2 + k') + m_2(k_1 + k'))\omega^2 + k_1k_2 + (k_1 + k_2)k' = 0, \quad (1.87)$$

ki je pravzaprav kvadratna enačba za ω^2 . Hitro se lahko prepričamo, da ima enačba vedno dva pozitivna korena in da torej rešitev za ω obstaja.

Če imamo N linearnih nihali, lahko zaključek posplošimo. Enačbe za gibanje predstavljajo sistem N sklopljenih NDE 2. reda. Lastna nihanja, ko vsa telesa nihajo z enako frekvenco ω , iščemo z nastavkom

$$s_i(t) = s_{0i} \cos(\omega t + \delta_i), \quad (1.88)$$

kar na pripelje do homogenega sistema N algebraskih enačb. Sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta sistema enaka 0. Pogoj lahko zapišemo kot enačbo N -te stopnje za ω^2 . Enačba ima N rešitev za ω^2 ; moč je dokazati, da so vse rešitve realne in nenegativne. Dobimo N lastnih rešitev.

1.4.4 Lastna nihanja v primeru dveh enakih sklopljenih nihali

Poiskati moramo še rešitve za s_1 in s_2 v primeru lastnih nihanj. Postopek ilustriramo na zgledu dveh sklopljenih teles na drči; zaradi enostavnosti pa vzemimo $m_1 = m_2 = m$ in $k_1 = k_2 = k$. Hitro se lahko prepričamo, da sta korena kvadratne enačbe za ω^2 kar

$$\omega_I^2 = \frac{k}{m} \quad \text{in} \quad \omega_{II}^2 = \frac{k + 2k'}{m}. \quad (1.89)$$

Rešitvi za s_1 in s_2 , ki ustrežata prvemu lastnemu nihanju, dobimo tako, da ω_I^2 vstavimo v sistem enačb (1.84). Prva enačba da:

$$-m \frac{k}{m} s_1 + ks_1 + k'(s_2 - s_1) = 0, \quad k'(s_2 - s_1) = 0, \quad s_2 = s_1. \quad (1.90)$$

Druga enačba vodi do enakega rezultata, kar pa je posledica lastnosti, da so v primeru, ko je determinanta sistema enaka 0, enačbe med seboj linearno odvisne. Rešitve (1.90) ustreza situaciji, ko telesi nihata sočasno z enako amplitudo. Rešitev potem lahko zapišemo v obliki

$$s_1^I(t) = A \cos \omega_I t + B \sin \omega_I t, \quad s_2^I(t) = s_1^I(t) = A \cos \omega_I t + B \sin \omega_I t. \quad (1.91)$$

Rešitev za drugo lastno nihanje dobimo na podoben način. Prva enačba da:

$$-m \frac{k + 2k'}{m} s_1 + ks_1 + k'(s_2 - s_1) = 0, \quad -k's_2 - k's_1 = 0, \quad s_2 = -s_1. \quad (1.92)$$

Pomeni, da v tem primeru nihali nihata z enakima amplitudama drugo proti drugemu. Splošno rešitev za ta primer lahko zapišemo kot

$$s_1^{\text{II}}(t) = C \cos \omega_{\text{II}} t + D \sin \omega_{\text{II}} t, \quad s_2^{\text{II}}(t) = -s_1^{\text{II}}(t) = -C \cos \omega_{\text{II}} t - D \sin \omega_{\text{II}} t. \quad (1.93)$$

Končno zapišimo še splošno obliko rešitve za poljubno nihanje prvega in drugega nihala. Kot smo že povedali, je splošna rešitev kar superpozicija lastnih rešitev. V našem primeru sledi

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_1^{\text{I}}(t) + s_1^{\text{II}}(t) = A \cos \omega_{\text{I}} t + B \sin \omega_{\text{I}} t + C \cos \omega_{\text{II}} t + D \sin \omega_{\text{II}} t, \\ s_2(t) &= s_2^{\text{I}}(t) + s_2^{\text{II}}(t) = A \cos \omega_{\text{I}} t + B \sin \omega_{\text{I}} t - C \cos \omega_{\text{II}} t - D \sin \omega_{\text{II}} t. \end{aligned} \quad (1.94)$$

1.4.5 Začetni pogoji v primeru sklopljenih nihali

V primeru N sklopljenih nihali je rešitev enolično določena z $2N$ začetnimi pogoji: običajno povemo začetni odmik in hitrost za vsako nihalo. V primeru dveh nihali na drči torej iz začetnih pogojev določimo A, B, C in D v rešitvi (1.94).

Recimo, da na začetku prvo nihalo odmaknemo za s_0 iz njegove mirovne lege, drugo pa pridržimo v mirovni legi in ob času $t = 0$ obe nihali hkrati spustimo. Velja

$$s_1(0) = s_0, \quad \dot{s}_1(0) = 0, \quad s_2(0) = 0, \quad \dot{s}_2(0) = 0, \quad (1.95)$$

od koder dobimo sistem enačb:

$$A + C = s_0, \quad \omega_{\text{I}} B + \omega_{\text{II}} D = 0, \quad A - C = 0, \quad \omega_{\text{I}} B - \omega_{\text{II}} D = 0, \quad (1.96)$$

z rešitvijo $A = C = \frac{1}{2}s_0, B = D = 0$. Rešitev za prvo nihalo ima tako obliko

$$s_1(t) = \frac{1}{2}s_0(\cos \omega_{\text{I}} t + \cos \omega_{\text{II}} t) = s_0 \cos\left(\frac{\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_{\text{I}} + \omega_{\text{II}}}{2} t\right), \quad (1.97)$$

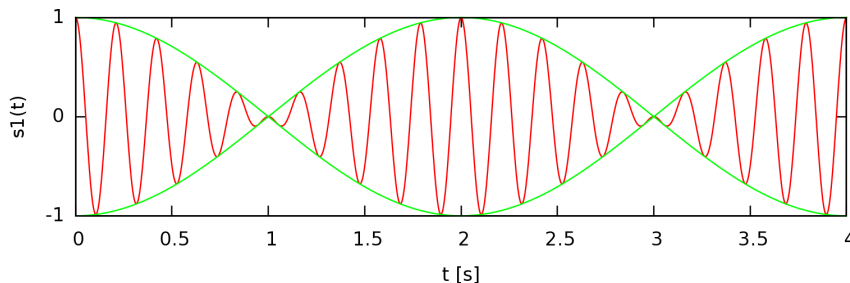
pri čemer smo upoštevali zvezo $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. Drugo nihalo niha kot

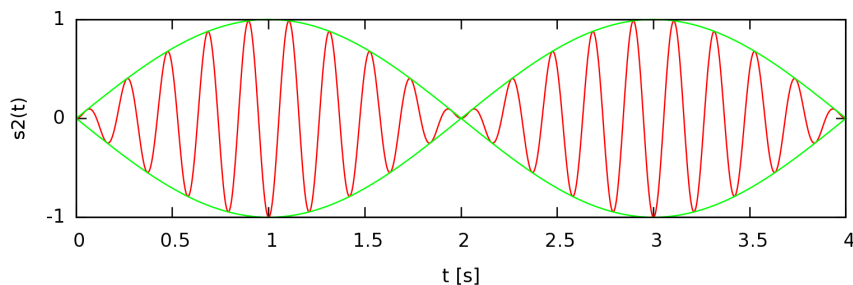
$$s_2(t) = \frac{1}{2}s_0(\cos \omega_{\text{I}} t - \cos \omega_{\text{II}} t) = s_0 \sin\left(\frac{\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_{\text{I}} + \omega_{\text{II}}}{2} t\right), \quad (1.98)$$

Dobili smo značilno *utripanje*. Pri funkciji, $\cos\left(\frac{\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}}}{2} t\right)$, določa časovno spremenljivo amplitudo nihanja (obarvana zeleno na sliki). Čas utripa je določen z ničlami funkcije:

$$\cos\left(\frac{\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}}}{2} t_i\right) = 0, \quad t_u = t_{i+1} - t_i = \frac{2\pi}{(\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}})} = \frac{1}{(\nu_{\text{I}} - \nu_{\text{II}})} \quad (1.99)$$

Slika kaže primer z $s_0 = 1, \omega_{\text{I}} = 10\pi \text{ s}^{-1}$ in $\omega_{\text{II}} = 9\pi \text{ s}^{-1}$. V tem primeru je $t_u = 2 \text{ s}$.





1.4.6 Prosta (sklopljena) nihala

Poseben primer sklopljenih nihala so prosta nihala, to je nihala, ki niso pritrjena na okolico in se lahko prosto gibljejo.

V našem primeru dveh jahačev na zračni drči tak sistem dobimo tako, da odstranimo levo in desno vzmet. Enačbe za prosta jahača dobimo iz enačb (1.81)-(1.87), tako da postavimo $k_1 = k_2 = 0$. Kvadratna enačba za ω^2 (1.87) ima potem obliko

$$m_1 m_2 (\omega^2)^2 - (m_1 + m_2) k' \omega^2 = 0, \quad (1.100)$$

Rešitvi sta

$$\omega_I^2 = 0 \quad \text{in} \quad \omega_{II}^2 = \frac{(m_1 + m_2)k'}{m_1 m_2} \equiv \frac{k'}{m^*}, \quad m^* = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}, \quad (1.101)$$

pri čemer smo vpeljali m^* kot *reducirano maso* sistema dveh teles.

Poiščimo še rešitvi za s_1 in s_2 . Če vstavimo prvi koren $\omega^2 = 0$ v prvo enačbo (1.84) (za $k_1 = 0$), dobimo $s_1 = s_2$. Enačba za nihanje, $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ ima za $\omega^2 = 0$ obliko $\ddot{s} = 0$ in ji zadošča katera koli linearna funkcija časa:

$$s_1 = s_2 = a + bt. \quad (1.102)$$

Če v enačbo (1.84) vstavimo drugi koren, $\omega_{II}^2 \equiv \omega^2 = (m_1 + m_2)k' / m_1 m_2$, sledi

$$-\frac{(m_1 + m_2)k'}{m_2} s_1 + k' s_1 - k' s_2 = 0, \quad s_2^{II} = -\frac{m_1}{m_2} s_1^{II} \quad (1.103)$$

in splošno rešitev za drugo lastno nihanje lahko zapišemo v obliki

$$s_1^{II} = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad s_2^{II} = -\frac{m_1}{m_2} A \cos \omega t - \frac{m_1}{m_2} B \sin \omega t. \quad (1.104)$$

Splošna rešitev je je vsota obeh lastnih rešitev,

$$s_1 = a + bt + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.105)$$

$$s_2 = a + bt - \frac{m_1}{m_2} A \cos \omega t - \frac{m_1}{m_2} B \sin \omega t. \quad (1.106)$$

Poglejmo, kako se pri takšnem splošnem gibanju giblje težišče sistema. Velja

$$s^*(t) = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m_1 + m_2} = a + bt \equiv s_0^* + v^* t. \quad (1.107)$$

Težišče se giblje le premo enakomerno in *ne niha*. Zato lahko parameter a v rešitvi za prvo lastno nihanje interpretiramo kot lego težišča ob času $t = 0$, b pa kot hitrost težišča v^* .

Splošno gibanje našega sistema smo razstavili na dve gibanji: gibanje težišča in na nihanje glede na težišče, podobno kot smo splošno gibanje togega telesa razstavili na gibanje težišča in na vrtenje telesa okoli težišča.

Pri poljubnem prostem sistemu sklopljenih nihali je ena od lastnih frekvenc vedno enaka 0; tej frekvenci ustreza togo gibanje sistema kot celote. Ostalih $N - 1$ rešitev pa ustreza različnim načinom nihanja, pri katerih pa telesa nihajo tako, da je težišče sistema vedno pri miru.

Zgled: Pri rešitvi (1.105)–(1.106) vzemimo, da na začetku jahača mirujeta na zračni drči, ob času $t = 0$ prvega sunemo s hitrostjo v_0 proti drugemu. Vsak je na začetku torej v svoji mirovni legi: $s_1(0) = s_2(0) = 0$, prvi se giblje s hitrostjo v_0 , drugi pa miruje: $ds_1/dt = v_0$, $ds_2/dt = 0$. Dobimo

$$s_1(0) = a + A = 0, \quad s_2(0) = a - \frac{m_1}{m_2} A = 0, \quad \dot{s}_1(0) = b + B\omega = v_0, \quad \dot{s}_2(0) = b - \frac{m_1}{m_2} B\omega = 0,$$

z rešitvijo $a = A = 0$, $b = m_1 v_0 / (m_1 + m_2)$, $B = m_2 v_0 / \omega (m_1 + m_2)$.

Poglavje 2

Fourierova analiza

2.1 Fourierova vrsta

Funkcijo $f(t)$, s periodo T , lahko razvijemo v Fourierovo vrsto

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.1)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt. \quad (2.2)$$

Velja Parsevalova enačba:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 \, dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.3)$$

Enačbo interpretiramo v primeru izmeničnega toka ali napetosti s periodo T , ki je sestavljen iz več sinusnih nihanj s (krožnimi) frekvencami $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$ (tak signal na primer dobimo, če posnamemo glasbeni instrument). Moč na uporniku R zapišemo kot $P(t) = RI(t)^2$ ali kot $P(t) = U(t)^2/R$, opravljeno delo v času t pa kot $A = \int_0^t P(t) \, dt$. Za *povprečno moč* velja

$$\bar{P} = \frac{A}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t P(t) \, dt = \frac{1}{T} R \int_0^T I(t)^2 \, dt = \frac{1}{T R} \int_0^T U(t)^2 \, dt. \quad (2.4)$$

Ker je funkcija periodična, zadostuje, da povprečje izračunamo le v časovnem intervalu ene periode $[0, T]$. Če napetost $U(t)$ razvijemo v vrsto (2.1) (koeficienti imajo v tem primeru enoto napetosti), iz Parsevalove enačbe sledi

$$\bar{P} = \frac{1}{T R} \int_0^T U(t)^2 \, dt = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n, \quad (2.5)$$

pri tem je

$$P_0 = \frac{1}{4R} a_0^2 \quad (2.6)$$

del moči, ki odpade ne *enosmerno komponento* napetosti,

$$P_n = \frac{1}{2R} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.7)$$

pa moč, ki odpade na nihanje s frekvenco $n\omega_0$

Porazdelitev moči po frekvencah prikažemo s *spektrom* moči. Na absciso nanašamo bodisi n bodisi frekvence $\omega_n = n\omega_0$ in pri vsaki vrednosti narišemo pokončno daljico z višino, ki se sorazmerna moči $P_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.

Zgled Pogledjmo si Fourierovo vrsto za funkcijo, ki ima v eni periodi obliko

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases} \quad (2.8)$$

Velja

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt = \frac{2}{T} \frac{T}{2} = 1. \quad (2.9)$$

za $n > 0$ pa

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{n\omega_0 T} \left[\sin n\omega_0 \frac{T}{2} - 0 \right] = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi = 0,$$

v zadnji vrstici smo vstavili $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega_0 t dt = -\frac{2}{n\omega_0 T} \left[\cos n\omega_0 \frac{T}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = -\frac{1}{n\pi} \begin{cases} 0 & n \text{ sod} \\ -2 & n \text{ lih} \end{cases} \quad (2.10)$$

Le a_0 in lihi koeficienti pri $\sin n\omega_0$ so različni od nič:

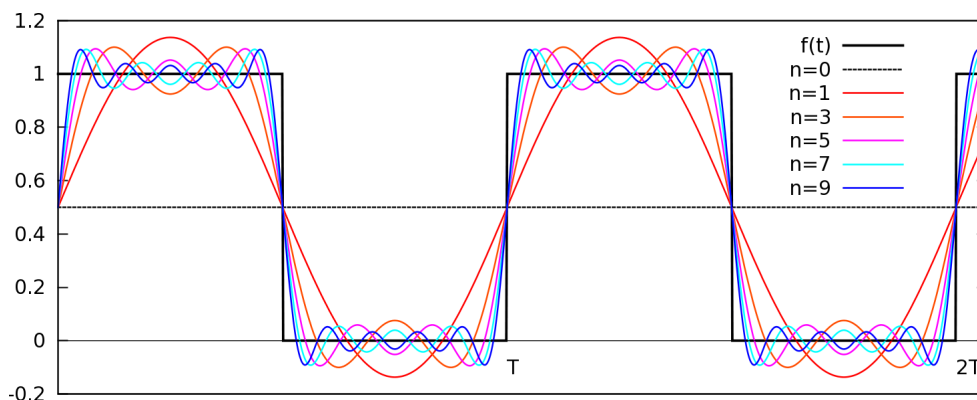
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots + \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t + \dots \right] \quad (2.11)$$

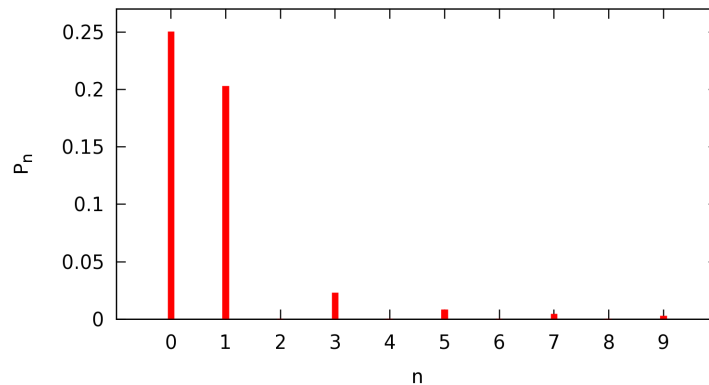
Parsevalova enačba ima v našem primeru obliko

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (2.12)$$

Levo stran lahko izračunamo in dobimo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + \frac{2}{25\pi^2} + \frac{2}{49\pi^2} + \frac{2}{81\pi^2} + \dots \quad (2.13)$$





Na zgornji sliki je prikazan časovni potek funkcije $f(x)$ in aproksimacije s Fourierovo vrsto, pri kateri upoštevamo le prvi člen ($n = 0$), prva dva člena ($n = 1$), ..., prvih $n + 1$ členov; na drugi sliki je pripadajoči spekter.

2.2 Zapis v kompleksnem

Fourierovo vrsto lahko zapišemo v kompaktnější obliki, če namesto funkcij \cos in \sin vstavimo $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ in $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}) + \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-in\omega_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega_0 t} \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* e^{in\omega_0 t}. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Vpeljali smo

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad A_n^* = \frac{a_n - ib_n}{2}, \tag{2.15}$$

oziroma

$$a_n = A_n + A_n^*, \quad b_n = \frac{A_n - A_n^*}{i}. \tag{2.16}$$

V drugi vsoti v (2.14) zamenjamo $n \rightarrow -n$ in vpeljimo

$$A_{-n} = A_n^*. \tag{2.17}$$

Dobimo

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} A_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-in\omega_0 t}. \tag{2.18}$$

V vsoto smo lahko vključili tudi A_0 , saj je $e^{i0} = e^0 = 1$.

Za kompleksne koeficiente A_n velja

$$A_n = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega_0 t + i \sin n\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt. \tag{2.19}$$

Parsevalovo enačbo lahko sedaj prepíšemo v obliko

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n A_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2, \quad (2.20)$$

o čemer se lahko hitro prepričamo, če za A_n in A_n^* vstavimo (2.15).

Za zgled vzemimo periodično funkcijo s periodo T , ki ima v eni periodi obliko $e^{-\beta t}$. V tem primeru koeficiente razvoja hitreje izračunamo preko koeficientov A_n :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\beta t} e^{in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{(-\beta + in\omega_0)t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{(-\beta + in\omega_0)} \left(e^{(-\beta + in\omega_0)T} - 1 \right). \quad (2.21)$$

Velja

$$\omega_0 T = 2\pi, \quad e^{in\omega_0 T} = e^{i2\pi n} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 \quad (2.22)$$

in dobimo

$$A_n = \frac{1 - e^{-\beta T}}{T(\beta - in\omega_0)}, \quad A_n^* = \frac{1 - e^{-\beta T}}{T(\beta + in\omega_0)}. \quad (2.23)$$

Za koeficiente a_n in b_n pa dobimo

$$a_n = A_n + A_n^* = \frac{1 - e^{-\beta T}}{T} \left(\frac{1}{\beta - in\omega_0} + \frac{1}{\beta + in\omega_0} \right) = \frac{2\beta(1 - e^{-\beta T})}{T(\beta^2 + n^2\omega_0^2)}, \quad (2.24)$$

$$b_n = \frac{A_n - A_n^*}{i} = \frac{2n\omega_0(1 - e^{-\beta T})}{T(\beta^2 + n^2\omega_0^2)}. \quad (2.25)$$

2.3 Fourierov integral

Poglejmo si, kako se izrazi obnašajo v limiti, ko gre perioda T preko vsake meje, ko torej za $f(t)$ lahko vzamemo *neperiodično* funkcijo. V limiti $T \rightarrow \infty$ velja $\omega_0 \rightarrow 0$ in razmiki med zaporednimi frekvencami v spektru postanejo infinitezimalno majhni. Koeficienti

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{in\omega_0 t} dt \quad (2.26)$$

so sorazmerni z ω_0 in postanejo v limiti prav tako infinitezimalno majhni. Vpeljimo

$$\omega_n = n\omega_0, \quad \Delta\omega \equiv \omega_0 = \omega_{n+1} - \omega_n, \quad A_n = A(\omega_n)\Delta\omega \equiv A(\omega_n)\omega_0. \quad (2.27)$$

Koeficienti $A(\omega_n)$ v limiti ostanejo končni:

$$A(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{i\omega_n t} dt \quad (2.28)$$

Fourierova vrsta pa ima sedaj obliko

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \Delta\omega. \quad (2.29)$$

V limit $\Delta\omega \rightarrow 0$ lahko vsoto nadomestimo z integralom, ω_n pa postane zvezna spremenljivka ω in teče od $-\infty$ do $+\infty$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

in velja (dopustimo, da funkcija $f(t)$ obstaja tudi za negativne čase):

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.31)$$

Funkcija $A(\omega)$ je Fourierova *transformiranka* funkcije $f(t)$, (2.31) pa Fourierova transformacija. Enačba (2.30) predstavlja obratno Fourierovo transformacijo.

Levo in desno stran *Parsevalove enačbe* (2.20) prepíšemo v obliko:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_0^T f(t)^2 dt, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(\omega_n)|^2 (\Delta\omega)^2$$

Na desni in na levi se okrajša $\Delta\omega$ in v limiti $\Delta\omega \rightarrow 0$ dobimo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.32)$$

V primeru eksponentne funkcije (privzamemo $f(t) = 0$ za $t < 0$), ki smo jo obravnavali v prejšnjem razdelku, dobimo v limiti $T \rightarrow \infty$:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi(\beta - i\omega)}, \quad |A(\omega)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \quad (2.33)$$

Preverimo, da res velja Parsevalova enačba. Integral na levi je enostaven:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\beta t} dt = \frac{1}{4\pi\beta}. \quad (2.34)$$

V integralu na desni

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\beta^2 + \omega^2} \quad (2.35)$$

vpeljemo $x = \omega/\beta$, upoštevamo sodost integranda, in dobimo

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\beta} 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi^2\beta} \arctan x \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi^2\beta} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4\pi\beta}. \quad (2.36)$$

Poglavje 3

Vektorski račun in parcialne diferencialne enačbe

3.1 Vektorska in skalarna polja v fiziki

Nekatere fizikalne količine opišemo s *polji*. Ločimo *vektorska* polja in *skalarna* polja. Vektorska polja so na primer

- jakost električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$
- gostota magnetnega polja $\vec{B}(\vec{r})$
- gravitacijsko polje $\vec{g}(\vec{r})$
- hitrostno polje pri pretakanju tekočin in plinov $\vec{v}(\vec{r})$

Primeru skalarnih polj pa so

- temperaturno polje $T(\vec{r})$
- tlačno polje $p(\vec{r})$
- električni potencial $U(\vec{r})$

V nekaterih primerih lahko polje opišemo z vektorskim in skalarnim poljem; primer je električno polje. Zvezo med skalarnim in vektorskim poljem v tem primeru zapišemo kot

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (3.1)$$

pri čemer je \vec{r}_0 točka (točke), v kateri(h) je potencial enak 0 – recimo $\vec{r}_0 = \infty$ v primeru točkastih nabojev v praznem prostoru, ali $\vec{r}_0 = 0$, če izhodišče koordinatnega sistema postavimo na negativno ploščo v kondenzatorju.

3.2 Gradient

3.2.1 Pojem

Pogosto pri problemih iz elektrostatike lažje izračunamo potencial $U(\vec{r})$ kot pa jakost električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$, saj je potencial skalarna količina. Iz znanega potenciala lahko izračunamo jakost vektorskega polja iz enačbe (3.1)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}}, \quad (3.2)$$

če znamo odvajati po vektorju.

Do pravila za odvajanje pridemo, če enačbo (3.1) zapišemo za diferencialno majhen premik,

$$dU(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.3)$$

Potencial si lahko predstavljamo kot funkcijo treh spremenljivk x , y in z in dU je njen totalni diferencial. Vemo

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) \quad (3.4)$$

Vidimo, da lahko totalni diferencial zapišemo kot skalarni produkt dveh vektorjev, drugi vektor je $d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz)$; za prvega pa iz enačbe (3.1) razberemo, da je enak vektorju $-\vec{E}(\vec{r})$, torej

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (3.5)$$

Pomeni, da je komponento v smeri osi x dobimo tako, da funkcijo $U(x, y, z)$ parcialno odvajamo po x ; drugi dve komponenti dobimo podobno:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Rezultat lahko zapišemo tudi kot

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U(\vec{r}) = -\frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\text{grad } U(\vec{r}). \quad (3.6)$$

Vpeljali smo vektorski operator, *nabla*:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3.7)$$

Dobljeno pravilo za odvajanje seveda velja za poljubno skalarno polje $S(\vec{r})$; grad $S(\vec{r})$ je vektor, njegova velikost je

$$|\text{grad } S(\vec{r})| = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Smer gradienta razberemo z naslednjim razmislekom: spremembo skalarnega polja pri spremembi lege zapišemo s skalarnim produktom med gradientom polja in vektorjem premika $d\vec{r}$:

$$dS(\vec{r}) = \text{grad } S(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = |\text{grad } S(\vec{r})| |d\vec{r}| \cos \varphi, \quad (3.9)$$

pri čemer je φ kot med smerjo gradienta in smerjo premika. Če izberemo korak s predpisano dolžino, je sprememba funkcije največja, ko je $\varphi = 0$, torej, ko se premaknemo v smeri gradienta. Ugotovitev obrnemo in rečemo, da ima gradient smer najhitrejšega naraščanja skalarnega polja.

Skalarno polje ponazorimo s ploskvami, na katerih ima polje konstantno vrednost (recimo ekvipotencialne ploskve v elektrostatici, izoterme in izobare v meteorologiji). Pri ravninskih problemih postanejo ploskve kar črte konstantnih vrednosti; če je polje kar polje višin $h(x, y)$, so ploskve konstantnih višin izohipse; gradient pa ima smer največje strmine. Če se gibljemo v smeri izohipse, se višina ne spreminja in je $dh = 0$ in iz (3.9) sledi $\varphi = 90^\circ$. Gradient je torej *pravokoten* na izohipse.

Ugotovitev velja za vsa polja; pri električnem polju je gradient potenciala pravokoten na ekvipotencialne ploskev. Zaradi negativnega predznaka v (3.1) ima $\vec{E}(\vec{r})$ *nasprotno* smer gradienta polja.

3.2.2 Računanje gradienta

Izračunajmo gradient skalarnega polja, ki je odvisno le od razdalje od izhodišča, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Primer za takšno polje je kar potencial naboja v izhodišču, $U(r) = e/4\pi\epsilon_0 r$. Za ta primer dobimo

$$\text{grad} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Prvo komponento vektorja dobimo z odvajanjem po x :

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -\frac{x}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r}$$

in podobno za drugi dve komponenti:

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) \hat{r}.$$

Ugotovitev posplošimo na poljubno (odvedljivo) funkcijo r :

$$\text{grad} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \hat{r}.$$

Enostaven primer za skalarno funkcijo je $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$; hitro se prepričamo

$$\text{grad} \vec{a} \cdot \vec{r} = \text{grad} (a_x x + a_y y + a_z z) = (a_x, a_y, a_z) = \vec{a}.$$

Ker je odvajanje linearni operator, velja

$$\text{grad} u(\vec{r})v(\vec{r}) = u(\vec{r}) \text{grad} v(\vec{r}) + v(\vec{r}) \text{grad} u(\vec{r}).$$

3.3 Fizikalni primeri enačb z gradientom

Pri prevajanju toplote velja za toplotni tok skozi steno s površino S in debelino Δs zveza:

$$P = S \frac{\lambda \Delta T}{\Delta s} \quad \text{ali} \quad j_Q = \frac{P}{S} = \frac{\lambda \Delta T}{\Delta s}.$$

V tem primeru teče toplotni tok z mesta z višjo temperaturo proti mestu z nižjo temperaturo; smer je pravokotna na steno. V splošnem smer toka ni pravokotna na steno in velja

$$P = \iint \vec{j}_Q(\vec{r}) \cdot d\vec{S}.$$

Smer gostote toka je določena s smerjo najhitrejšega *pojemanja* temperature, torej v nasprotni smeri temperaturnega gradienta in lahko zapišemo

$$\vec{j}_Q(\vec{r}) = -\lambda \text{grad } T(\vec{r}).$$

Podobno lahko zapišemo za električni tok skozi žico z dolžino l in presekom S :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\zeta \frac{l}{S}} = S \zeta^{-1} \frac{U}{l} \quad \text{ali} \quad j_e = \frac{I}{S} = \zeta^{-1} \frac{U}{l}$$

in v splošnem

$$\vec{j}_e(\vec{r}) = -\zeta^{-1} \text{grad } U(\vec{r}).$$

Tok teče z mesta z višjim potencialom proti mestu z nižjim potencialom.

Pri difuziji teče gostota toka delcev $j = \Delta N / S \Delta t$ v smeri najhitrejšega pojemanja koncentracije (številске gostote) $n = N/V$ in tudi v tem primeru ima enačba podobno obliko kot pri električnem in toplotnem toku:

$$\vec{j}(\vec{r}) = -D \text{grad } n(\vec{r}).$$

3.4 Divergenca

3.4.1 Ohranitveni zakoni in kontinuitetna enačba

Ohranitveni zakon za fizikalno količino, recimo maso, je moč z besedami enostavno povedati, zatakne pa se, ko ga moramo zapisati v primeru bolj kompleksnega pojava, ko se snov pretaka po prostoru. V enostavnem primeru opazujemo posodo, v katero voda hkrati priteka in odteka. Bilanco v tem primeru napišemo v obliki enačbe:

$$\frac{dm}{dt} = \Phi_m - \Phi'_m, \quad (3.10)$$

pri čemer je Φ_m prihajajoči masni tok (tj. masa vode, ki priteče v posodo vsako sekundo), Φ'_m pa odhajajoči. Če je prvi večji od drugega, je sprememba dm/dt pozitivna, in masa vode v posodi narašča; v obratnem primeru je sprememba negativna in masa vode v posodi se zmanjšuje. Če je prihajajoči tok enak odhajajočemu, se količina vode v posodi ne spreminja; govorimo o *stacionarnem stanju*. Bilančno enačbo v obliki (3.10) imenujemo *kontinuitetna enačba* in ima podobno obliko tudi v primeru drugih ohranitvenih zakonov, na primer ohranitve električnega naboja, energije, števila delcev, ...

Enačba (3.10) je uporabna v primerih, ko voda priteka in odteka po ceveh, če pa opisujemo prostorsko porazdeljene tokove, je v tej obliki ne moremo uporabiti. Smer toka (tokovnic) določa *gostota masnega toka* \vec{j} . Tok skozi ploskev v splošnem primeru, ko se gostota toka spreminja od kraja do kraja, zapišemo z integralom:

$$\Phi_m = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.11)$$

S skalarnim produktom smo upoštevali, da je tok lahko odvisen od kota, pod katerim gostota toka vpada na ploskev. Če nas zanima celotni tok, ki priteka ali odteka v izbran del prostora, moramo gostoto toka integrirati po zaključeni ploskvi, ki omejuje izbrano področje. Tok skozi zaključeno ploskev zapišemo kot

$$\Phi_m = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.12)$$

V primeru zaključene ploskve vektor ploskve kaže navzven. Tok Φ_m je pozitiven na tistem delu ploskve, kjer kažeta \vec{j} in \vec{S} v isto smer (oz. ko je kot med njima manjši od 90°), in negativen, kjer sta nasprotno usmerjena (oz. ko je kot večji od 90°). Po tem dogovoru torej *pozitiven tok* Φ_m ustreza *odhajajočemu toku* (toku, ki teče *ven* iz ploskve) in kontinuitetno enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (3.13)$$

pri čemer smo maso izrazili z gostoto $m = \int \rho dV$ in odvod po času zapisali kot *parcialni odvod*. V tem primeru pomeni parcialni odvod po času odvajanje gostote v točki s konstantnimi x , y in z , torej v točki, ki se v času dt ne premakne. Prostornina V , po kateri integriramo, je notranjost zaključne ploskve S , po kateri integriramo na desni strani enačbe.

Ohranitev električnega naboja napišemo z enako enačbo, le da je ρ_{el} v tem primeru gostota električnega naboja in \vec{j}_{el} gostota električnega toka, $I = \oiint \vec{j}_{el} \cdot d\vec{S}$.

Omenimo še Gaussov zakon iz elektrostatičnega. Tu si silnice predstavljamo kot tokovnice in govorimo o električnem pretoku: $\Phi_e = \epsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Velja

$$e = \int_V \rho_{el} dV = \epsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3.14)$$

3.4.2 Računanje divergence

Zanima nas, kako lahko iz enačbe (3.14) izrazimo zvezo med ρ_{el} in \vec{E} , torej, kako lahko iz znanega polja \vec{E} ugotovimo, kako so razporejeni naboji, ki polje povzročajo. Operacijo imenujemo *divergenca* in jo lahko formalno zapišemo v obliki

$$\rho_{el} = \epsilon_0 \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}. \quad (3.15)$$

Izraz za divergenco v kartezičnih koordinatah dobimo tako, da zapišemo enačbo za majhno telo v obliki kvadra s stranicami dx , dy , dz . Vektor \vec{E} v točki (x, y, z) usmerimo tako, da so njegove projekcije na koordinatne osi pozitivne. Zapišimo prispevke desne in leve ploskve, sprednje in zadnje ter zgornje in spodnje:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= E_x(x+dx, y, z)dydz - E_x(x, y, z)dydz + E_y(x, y+dy, z)dx dz - E_y(x, y, z)dx dz \\ &\quad + E_z(x, y, z+dz)dx dy - E_z(x, y, z)dx dy \\ \int_V \rho_{el} dV &= \rho_{el}(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Enačbo delimo z $dx dy dz$ (in z ϵ_0) in dobimo

$$\frac{\rho_{el}(x, y, z)}{\epsilon_0} = \frac{E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)}{dx} + \frac{E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)}{dy}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_z(x, y, z + dz) - E_z(x, y, z)}{dz} \\
= & \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \\
= & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv \operatorname{div} \vec{E}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Enačbo (3.14) prepišemo v obliko:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV. \tag{3.18}$$

V diferencialni geometriji je to *Gaussov izrek* in v tej obliki velja za poljubno (odvedljivo) polje $\vec{E}(\vec{r})$. Z Gaussovim izrekom sedaj lahko kontinuitetno enačbo (3.112) zapišemo kot

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV, \tag{3.19}$$

Integranda v integralu po prostornini morata biti enaka:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}, \tag{3.20}$$

kar predstavlja ekvivalentno obliko kontinuitetne enačbe. V primeru (3.42) govorimo o *lokalnem* zapisu fizikalnega zakona, v primeru (3.112) pa o *globalnem*.

Izračunajmo divergenco polja točkastega naboja v izhodišču koordinatnega sistema: $\vec{E} = e\vec{r}/4\pi\epsilon_0 r^3$. Izraz zapišemo kot produkt konstante, skalarnega polja $u = r^{-3}$ in vektorskega polja $\vec{v} = \vec{r}$. Ker je odvajanje linearen operator, velja

$$\vec{\nabla} \cdot (u(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})) = u(\vec{r})\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} u(\vec{r}) \equiv u(\vec{r})\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \cdot \operatorname{grad} u(\vec{r}) \tag{3.21}$$

V našem primeru je

$$\vec{\nabla} u(\vec{r}) = \vec{\nabla} r^{-3} = -3r^{-4} \hat{r}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \tag{3.22}$$

Velja še

$$\vec{r} \cdot \hat{r} = \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{r^2}{r} = r.$$

in končno dobimo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} r^{-3} + 3 \frac{1}{r^3} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(-3 \frac{1}{r^3} + 3 \frac{1}{r^3} \right) = 0 \tag{3.23}$$

razen v točki $r = 0$, kjer izraz ni definiran. Izraz je torej povsod nič, razen v izhodišču – seveda, saj je tam točkasti naboj. Jakost naboja iz dobljenega izraza ne moremo določiti, določimo ga lahko le iz Gaussovega zakona v integralni obliki.

3.5 Rotor

Za magnetno polje ima Gaussov zakon zelo preprosto obliko

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{ali} \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (3.24)$$

saj magnetni naboji (magnetni monopoli) ne obstajajo (oz. jih do sedaj še niso odkrili).

Izviri magnetnega polja so električni tokovi. Električne tokove in magnetno polje povezuje zakon o magnetni napetosti ali Ampèrov zakon:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}_{\text{el}} \cdot d\vec{S} \quad (3.25)$$

v primeru, ko nimamo premikalnih tokov. Ploskev, po kateri integriramo na desni, je napeta na zanki, ki jo določa integracijska pot v integralu na levi.

Zanima nas, kako lahko povežemo izvire \vec{j}_{el} s poljem \vec{B} , podobno kot smo to storili v primeru električnega polja. Izberimo diferencialno majhno pravokotno zanko v ravnini (x, y) s stranicami dx in dy in zapišimo integral po poti:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= B_x(x, y, z)dx + B_y(x + dx, y, z)dy - B_x(x, y + dy, z)dx - B_y(x, y, z)dy \\ \iint_S \vec{j}_{\text{el}} \cdot d\vec{S} &= j_z dx dy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

V drugi enačbi smo upoštevali, da ima vektor ploskvice smer osi z . Dobimo

$$\begin{aligned} \mu_0 j_z &= \left(\frac{B_y(x + dx, y, z) - B_y(x, y, z)}{dx} - \frac{B_x(x, y + dy, z) - B_x(x, y, z)}{dy} \right) \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Podobno naredimo še za majhno pravokotno zanko v ravnini (x, z) (to nam da izraz za j_y) in za majhno zanko v ravnini (y, z) (j_x). Končni izraz za vektor gostote toka lahko zapišemo kot

$$\mu_0 \vec{j}_{\text{el}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B}. \quad (3.28)$$

Operacijo rotor lahko uporabimo na drugih vektorskih poljih. Kot zgled vzemimo ploščo v ravnini x, y , ki se vrtili okoli osi z ; vektor $\vec{\omega}$ ima torej smer osi z . Izračunajmo vektor hitrosti za točko v ravnini plošče:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \omega \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \omega(-y, x, 0). \quad (3.29)$$

Rotacija tako dobljenega hitrostnega polja je enaka

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega) = 2\vec{\omega}. \quad (3.30)$$

3.6 Brezvrtnična in brezizvirna in polja

Vektorsko polje \vec{A} je *brezvrtnično*, če velja

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \quad \text{ozioroma} \quad \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (3.31)$$

V poglavju o gradientu smo ugotovili, da druga enačba velja za vektorska polja, ki jih je moč zapisati kot gradient nekega potencialne polja, na primer za jakost električnega polja v elektrostatiki $\vec{E} = -\text{grad } U(r)$. Od tod sledi ugotovitev, da za vsako (odvedljivo) skalarno polje $u(\vec{r})$ velja

$$\text{rot grad } u(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u(\vec{r}) = 0 \quad \text{ozioroma kar} \quad \text{rot grad} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0. \quad (3.32)$$

Vektorsko polje \vec{B} je *brezizvirno*, če velja

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{ozioroma} \quad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.33)$$

Pokazati je mogoče, da da je enačba izpolnjena za polja \vec{B} , ki jih lahko zapišemo kot rotor nekega drugega vektorskega polja, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, torej

$$\text{div rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = 0. \quad \text{ozioroma} \quad \text{div rot} = 0. \quad (3.34)$$

3.7 Osnovne enačbe matematične fizike

3.7.1 Drugi odvodi skalarnih polj

Iz Gaussovega zakona v diferencialni obliki, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$, lahko izračunamo porazdelitev naboja, če poznamo električno polje. Pri obratnem problemu, določitve \vec{E} iz znane porazdelitve prostorske ρ , moramo rešiti diferencialno enačbo

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (3.35)$$

Poiskati moramo tri funkcije E_x, E_y, E_z , odvisne od treh neodvisnih spremenljivk x, y, z . Pri navadnih diferencialnih enačbah smo imeli opravka z eno samo neodvisno spremenljivko; tu sedaj nastopajo tri neodvisne spremenljivke in parcialni odvodi po teh spremenljivkah. Enačba (3.35) je *parcialna diferencialna enačba* (PDE). Red je določen z najvišjim odvodom; torej je PDE 1. reda, linearna in nehomogena. Računanje polja v tej obliki ni praktično; če že računamo jakost električnega polja iz Gaussovega zakona, raje uporabimo zakon v integralni obliki. Problem je rešljiv, če najdemo integracijsko ploskev, na kateri je polje konstantno (Gaussova ploskev), na primer v primeru razsežnega ploščatega kondenzatorja, enakomerno nabite krogle ali valja. V splošnem primeru pa raje \vec{E} izrazimo s potencialom $U(\vec{r})$, ki je skalarna količina in dobimo

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = -\text{div grad } U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (3.36)$$

V kartezičnih koordinatah zapišemo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial U}{\partial y'} \frac{\partial U}{\partial z'} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (3.37)$$

Definirajmo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x, y, z) \equiv \Delta U(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (3.38)$$

Vpeljali smo diferencialni *Laplaceov operator*, ki ima v kartezičnih koordinatah obliko

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.39)$$

Poissonova enačba Enačba oblike

$$\Delta u(\vec{r}) = f(x, y, z) \quad (3.40)$$

je PDE 2. reda, linearna in nehomogena; enačbo imenujemo *Poissonova*.

Laplaceova enačba Če enačba (3.40) nima nehomogenega člena:

$$\Delta u(\vec{r}) = 0, \quad (3.41)$$

govorimo o *Laplaceovi* enačbi.

3.7.2 Difuzijska enačba

Pri difuziji spremljamo gibanje velikega števila delcev v sredstvu (recimo delcev črnila, ki smo ga kapnili v vodo). Pri tem se število delcev ohranja, kar lahko zapišemo s kontinuitetno enačbo

$$\frac{dN}{dt} = - \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (3.42)$$

pri čemer je j gostota toka, definirana kot število delcev, ki gre vsako sekundo skozi enoto ploskve. Vpeljemo še gostoto delcev, $n = dN/dV$ in po analogiji s kontinuitetno enačbo za snovne tokove zapišemo

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial n}{\partial t}. \quad (3.43)$$

Difuzijski tok teče v smeri najhitrejšega zmanjševanja gostote n , kar zapišemo kot

$$\vec{j} = -D \operatorname{grad} n, \quad (3.44)$$

pri čemer je D *difuzijska konstanta*. Enačbo za spreminjanje gostote n v kraju in času dobimo tako, da enačbo (3.44) vstavimo v (3.43):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} n(\vec{r}, t) = \Delta n(\vec{r}, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Dobili smo PDE 2. reda, linearno in homogeno. Za razliko od *Laplaceove* enačbe imamo na desni strani še časovni odvod iskane funkcije.

Stacionarno stanje V stacionarnem stanju velja, da se količine s časom ne spreminjajo (seveda pa se lahko spreminjajo s krajem). V stacionarnem stanju je zato $\partial n / \partial t = 0$ in difuzijska enačba preide v Laplaceovo enačbo:

$$\Delta n(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.46)$$

Prevajanje toplote Iz energijskega zakona sledi kontinuitetna enačba za notranjo energijo telesa, ki je v toplotnem stiku z okolico

$$\frac{dW_n}{dt} = -P_{\text{oddana}} = -\oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}, \quad (3.47)$$

pri čemer je \vec{j}_Q gostota toplotnih tokov. (Zanemarili smo morebitno dovedeno delo, kar ni upravičeno, če imamo opravka s plini.) Notranjo energijo izrazimo z gostoto snovi, prostornino, temperaturo in specifično toploto.

$$\int dV \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}, \quad \text{oziroma} \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_Q \quad (3.48)$$

Če se toplota izmenjuje z okolico le s prevajanjem, velja $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$ in dobimo

$$\text{div} \vec{j}_Q = -\lambda \text{div} \text{grad} T = -\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{oziroma} \quad \Delta T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.49)$$

Za temperaturo dobimo enako enačbo kot za difuzijo delcev. Enačbo posplošimo, tako da upoštevamo še možne izvire toplote v snovi. V tem primeru kontinuitetno enačbo zapišemo kot

$$\int dV \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\oint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} + P_i. \quad (3.50)$$

Vpeljemo gostoto toplotnih izvirov q :

$$q = \frac{dP_i}{dV}, \quad P_i = \int q dV, \quad (3.51)$$

in kontinuitetno enačbo v diferencialni obliki zapišemo kot

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_Q + q. \quad (3.52)$$

Upoštevamo še $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$ in enačba za prevajanje toplote dobi v tem primeru obliko

$$\Delta T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{q}{\lambda}. \quad (3.53)$$

Dobili smo PDE 2. reda, linearno in nehomogeno. V stacionarnem primeru, $\partial T / \partial t = 0$, dobimo *Poissonovo* enačbo, če poleg tega v snovi ni izvirov, pa *Laplaceovo*.

Schrödingerjeva enačba V nerelativistični kvantni mehaniki opišemo gibanje delca z *valovno funkcijo* $\psi(\vec{r}, t)$, ki je povezana z *verjetnostjo* $w(\vec{r}, t) dV = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$, da najdemo delec v prostornini dV na mestu \vec{r} . Namesto Newtonovega zakona opišemo gibanje delca s *Schrödingerjevo enačbo*, ki ima v primeru prostega delca podobno obliko kot difuzijska enačba:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t), \quad (3.54)$$

pri čemer je \hbar Planckova konstanta, deljena z 2π . V tem primeru stacionarno stanje ni definirano z $\partial \psi(\vec{r}, t) / \partial t = 0$, temveč z $\partial |\psi(\vec{r}, t)|^2 / \partial t = 0$, saj je fizikalna količina verjetnostna gostota in ne

valovna funkcija. Enačbo $\partial|\psi(\vec{r},t)|^2/\partial t = 0$ reši nastavek $\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})e^{-i\omega t}$, pri čemer je ω poljubna konstanta. V stacionarnem stanju ima Schrödingerjeva enačba obliko

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\vec{r}) = \hbar\omega\phi(\vec{r}). \quad (3.55)$$

Pri reševanju Schrödingerjeve enačbe pogosto uvedemo imaginaren čas $\tau = it$, kar enačbo prevede v difuzijsko enačbo, ki je za numerično reševanje mnogo bolj stabilna kot originalna enačba.

3.7.3 Reševanje PDE v primeru stacionarnih problemov

Pri reševanju NDE je bila naloga definirana, ko smo poleg enačbe navedli tudi *začetne pogoje*. Število potrebnih začetnih pogojev je odvisno od reda NDE.

PDE so odvisne od krajevnih koordinat in v primeru difuzijske enačbe tudi od časa. Iz velike množice rešitev izluščimo rešitev našega problema tako da navedemo *robne pogoje*, to je vrednost funkcije ali/in njenih odvodov na meji območja, na katerem iščemo rešitev. Če rešujemo nestacionaren primer pri difuzijski enačbi, pa moramo povedati tudi *začetni pogoj*, to je vrednost funkcije v vsem območju ob začetnem času.

Pri poljubnih začetnih pogojih lahko rešitev dobimo le z numeričnimi metodami. Analitične rešitve dobimo le v primeru enostavnih območij, recimo znotraj krogle, valja ali kvadra.

V primeru *stacionarnih polj* imamo opravka bodisi z Poissonovo bodisi z Laplaceovo enačbo:

$$\Delta u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (3.56)$$

Posebej preprosti so primeri, ko iz simetrije problema lahko ugotovimo, da je iskana funkcija odvisna le od ene spremenljivke.

Kartezične koordinate V primeru, ko je območje omejeno z dvema vzporednima ravninama, na katerih je predpisana konstantna vrednost funkcije, postavimo koordinatno os x tako, da je pravokotna na ravnini. Če je tudi nehomogeni člen odvisen le od koordinate x , lahko iz simetrije problema sklepamo, da je rešitev neodvisna od koordinat y in z in Poissonova enačba preide v NDE:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x). \quad (3.57)$$

V tem primeru namesto parcialnih odvodov pišemo kar navadni odvod. Navedemo še robna pogoja. Na ravnini pri $x = x_1$ naj ima funkcija vrednost u_1 , na (vzporedni) ravnini pri $x = x_2$ pa vrednost u_2 :

$$u(x_1) = u_1, \quad u(x_2) = u_2. \quad (3.58)$$

V tem primeru govorimo o robnih pogojih *prve vrste*. Lahko pa bi na meji predpisali odvode funkcije, na primer

$$\left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=x_1} = v_1, \quad \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = v_2, \quad (3.59)$$

kar predstavlja robni pogoj *druge vrste*.

Cilindrične koordinate Ko je območje omejeno z valjem je smiselno vzeti *cilindrične koordinate*,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z; \quad \text{oziorama} \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (3.60)$$

V tem primeru moramo Laplaceov operator zapisati v cilindričnih koordinatah. Velja

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.61)$$

Ko je tudi nehomogeni del v Poissonovi enačbi odvisen le od koordinate r , je iskana funkcija le funkcija koordinate r in neodvisna od z in φ , $u(r, z, \varphi) = u(r)$ in Poissonova enačba postane

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{du(r)}{dr} = f(r). \quad (3.62)$$

(V primeru Laplaceove enačbe je desna stran seveda enaka 0.)

Sferične koordinate Ko je območje omejeno s koncentričnimi krogli, uporabimo *sferične koordinate*:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}; \quad (3.63)$$

oziorama

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (3.64)$$

Laplaceov operator ima tedaj obliko

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (3.65)$$

in ob predpostavki $u(\vec{r}) = u(r)$ sledi

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du(r)}{dr} = f(r). \quad (3.66)$$

V primeru cilindričnih in sferičnih koordinat je robni pogoj podan tako, da predpišemo vrednost funkcije ali njenega odvoda pri $r = r_1$ in $r = r_2$.

3.7.4 Zgledi

Potencial v cilindričnem kondenzatorju Iščemo potencial znotraj praznega kondenzatorja z elektrodama v obliki dolgih valjev s skupno osjo. Na notranji elektrodi z radijem r_1 naj bo napetost U_1 , na zunanji z radijem r_2 pa U_2 .

Ker v notranjosti ni naboja, potencial zadošča Laplaceovi enačbi $\Delta U = 0$. Zaradi simetrije problema predpostavimo, da je U lahko odvisen le od r , izberemo cilindrične koordinate, in zapišemo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dU(r)}{dr} = 0, \quad U(r_1) = U_1, \quad U(r_2) = U_2. \quad (3.67)$$

Laplaceov enačbo najprej pomnožimo z r , saj točka $r = 0$ ni v definicijskem področju, v katerem iščemo rešitev. Dobimo

$$\frac{d}{dr} r \frac{dU(r)}{dr} = 0, \quad (3.68)$$

Od koder sledi, da je funkcija rdU/dr enaka neki konstanti, označimo jo s C . Po deljenju enačbe z r sledi

$$\frac{dU(r)}{dr} = \frac{C}{r}, \quad (3.69)$$

in po integraciji

$$U(r) = C \ln r + D. \quad (3.70)$$

Splošna rešitev je odvisna od dveh konstant, C in D , ki ju določimo iz robnih pogojev:

$$U(r_1) = C \ln r_1 + D = U_1, \quad U(r_2) = C \ln r_2 + D = U_2. \quad (3.71)$$

z rešitvijo

$$D = U_1 - C \ln r_1, \quad C = \frac{U_2 - U_1}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (3.72)$$

in končno

$$U(r) = C \ln r - C \ln r_1 + U_1 = C \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + U_1 = \frac{U_2 - U_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) + U_1. \quad (3.73)$$

Potencial enakomerno nabite krogle Iščemo potencial znotraj in zunaj krogle z radijem R , znotraj katere je enakomerno porazdeljen naboj e . Celoten prostor razdelimo na dve področji; znotraj krogle je gostota naboja različna od nič in potencial zadošča *Poissonovi* enačbi, zunaj pa *Laplaceovi* enačbi.

$$\text{I. } 0 \leq r \leq R, \quad \Delta U_I(r) = -\rho/\epsilon_0, \quad \rho = e/V = 3e/4\pi R^3,$$

$$\text{II. } r > R, \quad \Delta U_{II}(r) = 0.$$

Izberemo sferične koordinate in Poissonova enačba postane

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dU_I(r)}{dr} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.74)$$

Enačbo najprej pomnožimo z $r^2 dr$ in integriramo:

$$r^2 \frac{dU_I(r)}{dr} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \int r^2 dr = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + C. \quad (3.75)$$

Enačbo delimo z r^2 :

$$\frac{dU_I(r)}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{C}{r^2}. \quad (3.76)$$

in končno integriramo

$$U_I(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C}{r} + D. \quad (3.77)$$

V drugem primeru rešujemo Laplaceovo enačbo; koraki pri reševanju so enaki, le da je sedaj $\rho = 0$. Splošna rešitev zato lahko zapišemo kot

$$U_{II}(r) = -\frac{C'}{r} + D'. \quad (3.78)$$

Konstanti C' in D' seveda nista enaki kot v prvem primeru.

Do sedaj nismo še nič povedali o robnih pogojih. Potencial je nedoločen do konstante, ki jo lahko poljubno izberemo; običajno postavimo ničlo v neskončnosti. V našem primeru ima torej potencial v drugem področju predpisano vrednost pri $r \rightarrow \infty$, od koder lahko takoj določimo vrednost konstante D' :

$$U_{II}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad D' = 0. \quad (3.79)$$

Drugi robni pogoj dobimo z naslednjim razmislekom: ko smo izpeljevali splošno rešitev v prvem področju, smo v drugem koraku enačbo delili r^2 , kar pa ni bilo upravičeno, saj je točka $r = 0$ v našem definicijskem območju. Zato moramo razmisliti, kako je z vrednostjo dobljene rešitve (3.77) v točki $r = 0$. Vidimo, da gre v tej točki vrednost čez vse meje, kar ni smiselno, saj pričakujemo, da je v izhodišču potencial končen. (Neskončen potencial pa bi dobili, če bi bil v izhodišču točkast naboj.) Robni pogoj torej zahteva, da je funkcija v izhodišču enaka 0, kar izpolnimo tako, da postavimo konstanto $C = 0$:

$$U_I(r = 0) < \infty, \quad C = 0. \quad (3.80)$$

Določiti moramo še dve konstanti D in C' . Dobimo ju tako, da spojimo rešitvi v prvem in drugem območju. Pri $r = R$ mora biti potencial zvezen; če to ne bi bilo res, bi imel njegov odvod tam neskončno vrednost. Odvod potenciala po r je sorazmeren z radialno komponento jakosti električnega polja in iz zahteve, da je ta končna, sledi zveznost potenciala. Torej lahko zapišemo

$$U_I(r) = U_{II}(r), \quad -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + D = -\frac{C'}{R} \quad (3.81)$$

Kako pa je z zveznostjo odvoda pri $r = R$? Odvod je sorazmeren z radialno komponento električne poljske jakosti, in kot bomo videli v naslednjem poglavju, je ta zvezna, če je dielektričnost snovi (ϵ) v obeh območjih enaka. Pri naši nalogi je $\epsilon = 1$ zunaj krogle; vzamemo, da je tako tudi v notranjosti. V tem primeru velja

$$\left. \frac{dU_I(r)}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{dU_{II}(r)}{dr} \right|_{r=R}, \quad -\frac{\rho R}{3\epsilon_0} = \frac{C'}{R^2}, \quad (3.82)$$

od koder takoj dobimo

$$C' = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}, \quad D = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}. \quad (3.83)$$

Končno rešitev potem lahko zapišemo kot

$$U_I(r) = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}, \quad U_{II}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.84)$$

Dobili smo znani rezultat: zadnji izraz je polje točkastega naboja; po Gaussovem zakonu sledi, da je polje zunaj enakomerno nabite krogle enako polju točkastega naboja.

Prevajanje toplote z izviri V razsežni steni z debelino a in toplotno prevodnostjo λ_1 imamo enakomerno porazdeljene izvire toplote z gostoto q . Stena je na eni strani izolirana, na drugi strani pa se nadaljuje v razsežno steno z debelino b in toplotno prevodnostjo λ_2 . Drugo steno na drugi strani hladimo z vodo, tako da je zunanje površje druge stene pri konstantni temperaturi T_0 . Določiti moramo temperaturni profil v prvi in drugi steni.

Gre za stacionarno prevajanje toplote; v prvi steni imamo izvire, zato tu temperatura uboga Poissonovo enačbo, v drugi steni pa ni izvirov in enačba je Laplaceova. Os x postavimo pravokotno na steno, izhodišče naj bo na začetku prve stene, tam kjer je izolirana. Območje ponovno razdelimo v dva dela

$$\begin{aligned} \text{I. } 0 \leq x \leq a \quad \Delta T_I(x) &= \frac{d^2 T_I(x)}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda_1} \\ \text{II. } a < x \leq a + b \quad \Delta T_{II}(x) &= \frac{d^2 T_{II}(x)}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

Kako je z robnimi pogoji? V drugi steni velja, da je pri $x = a + b$ temperatura enaka T_0 , prva stena je pri $x = 0$ izolirana. To pomeni, da na tem mestu ne teče noben toplotni tok. Toplotni tok v smeri pravokotno na steno je povezan z gradientom temperature v tej smeri, torej z $dT(x)/dx$. Če naj bo toplotni tok enak 0, mora biti odvod temperature tu enak 0. Na meji obeh sten mora biti temperatura zvezna; v nasprotnem primeru bi tu teknel neskončen toplotni tok. Veljati mora tudi ohranitev toplotnega toka na meji: toliko toka, kot ga iz prve stene odteče, ga mora v drugo steno priteči:

$$j_1(x = a) = -\lambda_1 \frac{dT_I(x)}{dx} = j_2(x = a) = -\lambda_2 \frac{dT_{II}(x)}{dx}. \quad (3.85)$$

Sedaj lahko zapišemo vse štiri robne pogoje:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \frac{dT_I(x)}{dx} &= 0, \\ x = a: \quad T_I(a) &= T_{II}(a) \quad \text{in} \quad \lambda_1 \left. \frac{dT_I(x)}{dx} \right|_{x=a} = \lambda_2 \left. \frac{dT_{II}(x)}{dx} \right|_{x=a}, \\ x = a + b: \quad T_{II}(a + b) &= T_0. \end{aligned}$$

Z integracije enačb v prvem in drugem delu dobimo

$$T_I = -\frac{q}{\lambda_1} \frac{x^2}{2} + Ax + B, \quad T_{II} = Cx + D. \quad (3.86)$$

V splošni rešitvi vstavimo v robne pogoje in dobimo

$$\begin{aligned} x = 0: \quad A &= 0 \\ x = a: \quad -\frac{q}{\lambda_1} \frac{a^2}{2} + Aa + B &= Ca + D, \quad -qa + \lambda_1 A = \lambda_2 C, \\ x = a + b: \quad C(a + b) + D &= T_0, \end{aligned}$$

od koder lahko brez težav izluščimo še vrednosti za B , C in D .

3.8 Valovna enačba za elektromagnetno polje

3.8.1 Maxwelllove enačbe

Osnovne zakoni za EM polje so *Maxwellove enačbe*, tri od njih smo srečali pri obravnavni divergencije in rotorja. Zapišemo jih lahko v obliki integralne enačbe – temu bomo rekli *globalni opis zakona* ali v obliki diferencialne enačbe – *lokalni opis*:

	globalni opis	lokalni opis
Gaussov zakon	$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = e$	$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$
Gaussov zakon za magnetno polje	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$
Faradayev indukcijski zakon	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampèrov zakon	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j}_{\text{el}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{el}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

3.8.2 Ohranitev naboja

Poleg naštetih enačb velja še ohranitev naboja:

$$\int_V \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial t} dV = - \oiint_S \vec{j}_{\text{el}} \cdot d\vec{S}, \quad \frac{\partial \rho_{\text{el}}}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_{\text{el}} \quad (3.87)$$

Pet enačb pa med seboj ni linearno neodvisnih. Pokažimo, da ohranitev naboja sledi iz Maxwellovih enačb. (Pri tej in naslednji izpeljavi demonstriramo priročnost lokalnega zapisa Maxwellovih enačb.) Naboj se pojavi v Gaussovem zakonu, gostota toka pa Ampèrovem. Najprej poiščimo divergenco Ampèrove enačbe

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\operatorname{div} \vec{j}_{\text{el}} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \right), \quad (3.88)$$

pri tem smo lahko zamenjali vrstni red odvajanja po kraju in času, saj so vsi odvodi parcialni. Velja

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.89)$$

$\operatorname{div} \vec{E}$ pa izrazimo iz Gaussovega zakona:

$$0 = \mu_0 \left(\operatorname{div} \vec{j}_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{el}} \right) \quad (3.90)$$

od koder takoj sledi (3.87).

3.8.3 Valovna enačba za EM polje

Iz Maxwellovih enačb v diferencialni obliki lahko hitro izpeljemo enačbo za EM valovanje. V praznem prostoru je $\rho_{\text{el}} = 0$ in $\vec{j}_{\text{el}} = 0$. Polji \vec{E} in \vec{B} v enačbah nastopata povsem simetrično (konstanti μ_0 in ε_0 le določata enote); iz predzadnje enačbe vidimo, da časovno spremenljivo magnetno polje inducira električno polje, iz zadnje pa, da se magnetno polje pojavi okoli časovno spremenljivega električnega polja („premikalnega toka“). Iz zadnjih dveh enačb eliminirajmo magnetno polje. Najhitreje to storimo tako, da operacijo rotor uporabimo na indukcijskem zakonu:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (3.91)$$

pri čemer smo ponovno zamenjali vrstni red odvajanja na desni. Sedaj $\operatorname{rot} \vec{B}$ izrazimo iz Ampèrovega zakona:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.92)$$

Upoštevajmo še pravilo za dvojni vektorski produkt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \quad (3.93)$$

Prvi člen je enak 0, saj je $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = 0$ (sledi iz prvega zakona, saj je $\rho_{\text{el}} = 0$) in končno dobimo

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.94)$$

Do sedaj smo Laplaceov operator uporabili le na skalarnih poljih, v dobljeni enačbi pa deluje na vektorsko polje. V tem primeru pač pomeni, da enačba predstavlja tri enačbe. Za vsako komponento posebej velja:

$$\Delta E_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \quad \Delta E_y = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \Delta E_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \quad (3.95)$$

Preverimo, da je (3.94) res valovna enačba. Ravni val, ki se širi v smeri osi x , zapišemo kot

$$E_z(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad (3.96)$$

pri čemer je $k = 2\pi/\lambda$ in $\omega = 2\pi\nu$. Izračunajmo levo stran zadnje enačbe v (3.95):

$$\Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z(x, t)}{\partial x^2} = -(-k)^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (3.97)$$

in še desne:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx). \quad (3.98)$$

Enačba velja, če je izpolnjena enačba

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \quad \text{ali} \quad \frac{\omega}{k} \equiv c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad (3.99)$$

pri čemer je c hitrost valovanja.

Preverili smo – vsaj za ravni val –, da je (3.94) res valovna enačba za EM polje in hkrati izpeljali izraz za hitrost EM valovanja (svetlobno hitrost), $c = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$. V splošnem velja, da je enačba oblike

$$\Delta u(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (3.100)$$

valovna enačba in c hitrost valovanja.

3.9 Valovanje v snovi

3.9.1 Substancialni odvod

Opazujemo gibanje majhnega dela tekočine ali plina z maso m . Velja 2. Newtonov zakon, $m\vec{a} = \vec{F}$, pri čemer je \vec{F} vsota vseh sil, s katerimi okolica deluje na opazovani del tekočine. Poleg Newtonovega zakona velja še ohranitev mase. Opazovani del tekočine se giblje naprej, zato moramo paziti, da se Newtonov zakon nanaša res na isti del tekočine. Po času dt se premakne v novo točko, za katero velja $\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v} dt$. Pospešek zapišemo kot spremembo hitrosti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(\vec{r}(t + dt), t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt}. \quad (3.101)$$

Spremembo hitrosti lahko zapišemo tudi kot totalni diferencial funkcije treh krajevnih koordinat in časa:

$$d\vec{v}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt. \quad (3.102)$$

V času dt se del tekočine premakne za

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt, \quad (3.103)$$

in totalni diferencial zapišemo kot

$$d\vec{v}(x, y, z, t) = \left[v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dt, \quad (3.104)$$

pri tem smo v_x, \dots pisali levo, saj hitrosti v_x, \dots ne odvajamo. Prve tri člene lahko zapišemo kot skalarni produkt dveh vektorjev:

$$d\vec{v}(x, y, z, t) = \left[(v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dt = \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] dt. \quad (3.105)$$

Končni izraz za pospešek je potemtakem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (3.106)$$

3.9.2 Navier-Stokesova enačba

Zapišimo še silo na telo v neviskozni tekočini. Opazujmo majhen del tekočine v obliki kvadra s stranicami dx, dy, dz . Silo tlak na levo ploskvico $dydz$ zapišemo $F = p(x, y, z)dydz$, silo na nasprotni ploskvici pa kot $F = -p(x + dx, y, z)dydz$ saj sila kaže v nasprotni smeri glede na prvo. Vsota obeh sil ima smer osi x :

$$F_x = -(p(x + dx, y, z) - p(x, y, z))dydz. \quad (3.107)$$

Sila je različna od 0, če ima tlak na mestu $x + dx$ drugačno vrednost kot na mestu x . Rezultat delimo s prostornino $dV = dx dy dz$:

$$f_x = \frac{F_x}{dV} = -\frac{p(x + dx, y, z) - p(x, y, z)}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.108)$$

Podobno dobimo za komponenti v y in z smeri:

$$f_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.109)$$

Na levi strani imamo komponente vektorja *gostote sile*, ki ga v kompaktni obliki zapišemo kot

$$\vec{f} \equiv \frac{d\vec{F}}{dV} = -\text{grad } p. \quad (3.110)$$

Če Newtonov zakon $m\vec{a} = \vec{F}$ delimo z dV in upoštevamo zgornja izraza za pospešek in gostoto sile, dobimo

$$\rho \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \vec{f}_{\text{pr}} - \text{grad } p. \quad (3.111)$$

Dobili smo *Navier-Stokesovo* enačbo za gibanje tekočine brez trenja. (Dodali smo še prostorsko porazdeljene sile, na primer težo, $\vec{f}_{\text{pr}} = \rho \vec{g}$, pri čemer je \vec{g} težni pospešek.) Za popoln opis potrebujemo še kontinuitetno enačbo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \vec{j} = -\text{div } \rho \vec{v}. \quad (3.112)$$

Navier-Stokesova enačba je nehomogena PDE 1. reda in *nelinearna*.

3.9.3 Valovna enačba za zvok

Pri dovolj majhnih hitrosti, kakršne se pojavljajo v zvoku, lahko v (3.111) zanemarimo nelinearni člen. Pri zvoku nihata tlak in gostota okoli ravnovesnih vrednosti

$$p = p_0 + \delta p, \quad \delta p \ll p_0, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \delta \rho \ll \rho_0. \quad (3.113)$$

Če zanemarimo še težo, sledi iz (3.111) in (3.112)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } \delta p \quad \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho_0 \text{div } \vec{v}. \quad (3.114)$$

Pri tem smo upoštevali, da sta p_0 in ρ_0 konstanta in $\delta\rho \ll \rho_0$. Drugo enačbo odvajamo po času in za parcialni odvod hitrosti po času vstavimo zvezo iz prve enačbe:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta p = \Delta \delta p. \quad (3.115)$$

Zvezo med spremembo tlaka in spremembo gostote izrazimo iz definicije stisljivosti χ :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\chi \delta p. \quad (3.116)$$

Dobimo valovno enačbo

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi\rho_0} \Delta \delta\rho \quad (3.117)$$

in iz (3.100) razberemo hitrost valovanja v snovi: $c = \sqrt{1/\chi\rho_0}$.

Poglavje 4

Verjetnostni račun in osnove statistike

4.1 Porazdelitve verjetnosti

Pri ponavljanju poskusa ne dobimo vedno enakega izida. Naključje je posledica bodisi začetnih pogojev, ki se od poskusa do poskusa spreminjajo, bodisi temeljnih zakon kvantne mehanike. Količini, ki jo merimo, pravimo *slučajna spremenljivka*. Pri večini fizikalnih poskusov gre za *zvezno spremenljivko*, pri nekaterih poskusih pa spremenljivka zavzame le nekaj diskretnih vrednosti, recimo pri metu kocke je možnih izidov 6; tedaj govorimo o *diskretni spremenljivki*.

V statistiki nas zanima verjetnost, da pri ponovitvi poskusa dobimo izbrani izid. Verjetnosti za vse možne izide predstavimo v obliki *porazdelitve*.

4.1.1 Diskretne porazdelitve

Porazdelitev *diskretne spremenljivke* dobimo tako, za ponovimo poskus Z krat in preštejemo vse izide, N_k , ko se pojavi vrednost x_k , $k = 1, 2, 3, \dots, K$. (Pri kocki je $x_k = k$ in $K = 6$.) Tvorimo

$$p_k = \frac{N_k}{Z}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K, \quad \sum_{k=1}^K N_k = Z. \quad (4.1)$$

Vrednost p_k interpretiramo kot verjetnost, da pri ponovitvi poskusa dobimo vrednost x_k . Velja

$$p_k \geq 0, \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^K p_k = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^K N_k = 1. \quad (4.3)$$

Z (4.3) je porazdelitev *normirana*.

Da bo naša napoved dovolj zanesljiva, moramo napraviti čim več poskusov. Pravo porazdelitev bi dobili v limiti $Z \rightarrow \infty$.

Grafično porazdelitev prikažemo s „črtastim spektrom“, tako da pri vrednostih x_k narišemo navpično daljico z višino p_k .

4.1.2 Zvezne porazdelitve

Porazdelitev *zvezne spremenljivke* dobimo tako, da poskus ponovimo Z krat. Poiščemo območje (interval), znotraj katerega se pojavljajo vrednosti slučajne spremenljivke x . Interval razdelimo

na K podintervalov Δx in preštejemo vse izide, N_k , ki padejo znotraj k -tega podintervala. Kot v primeru diskretne spremenljivke tvorimo verjetnosti $\Delta p_k = N_k/Z$ in vpeljemo *gostoto verjetnosti*:

$$w_k = \frac{\Delta p_k}{\Delta x} = \frac{N_k}{Z\Delta x}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K. \quad (4.4)$$

Porazdelitev (4.4) prikažemo s histogramom; stolpci z višino w_k in širino Δx se seveda med seboj dotikajo.

Porazdelitev bo tem boljša, čim več poskusov naredimo ($Z \rightarrow \infty$) in čim manjše podintervale vzamemo ($\Delta x \rightarrow 0$). V tej limiti postane gostota verjetnosti zvezna funkcija

$$w(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p(x)}{\Delta x} = \frac{dp}{dx}. \quad (4.5)$$

Gostoto $w(x)$ interpretiramo takole: za dovolj majhen interval Δx je $w(x)\Delta x$ verjetnost, da pri ponovitvi poskusa pade vrednost slučajne spremenljivke znotraj intervala $x - \frac{1}{2}\Delta x \leq x \leq x + \frac{1}{2}\Delta x$.

Če nas zanima, kolikšna je verjetnost, da x pade v širši interval, recimo $[a, b]$, moramo verjetnosti sešteti po vseh podintervalih znotraj intervala $[a, b]$. Pri zvezni verjetnostni gostoti vsota preide v integral: verjetnost Δp je v tem primeru enaka

$$\Delta p = \int_a^b w(x) dx. \quad (4.6)$$

Nazorno je verjetnost enaka ploščini pod krivuljo $w(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Funkcija $w(x)$ je nenegativna, normalizacijsko zahtevo (4.3) pa v primeru zvezne porazdelitve zapišemo kot

$$\sum \Delta p_k = \sum \frac{\Delta p_k}{\Delta x} \Delta x = \sum w_k \Delta x \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1. \quad (4.7)$$

Integracijske meje smo razširili na celo os x ; če se vrednosti x pojavljajo le znotraj manjšega področja, velja, da je zunaj $w(x) = 0$.

4.1.3 Zvezne porazdelitve v več razsežnostih

Opazujmo dogodek, pri katerem izmerimo vrednosti dveh spremenljivk, recimo x in y . To je na primer lahko lega (točka) v ravnini, kjer se je dogodil dogodek. Definijsko področje v ravnini sedaj razdelimo na manjša področja. To so lahko pravokotniki s širino Δx in višino Δy . Poskus ponavljamo in preštejemo dogodke, ki padejo v k -ti pravokotnik. Izračunamo $\Delta p_k = N_k/Z$ in vpeljemo gostoto verjetnosti

$$w_k = \frac{\Delta p_k}{\Delta x \Delta y}. \quad (4.8)$$

V limit $Z \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$ in $\Delta y \rightarrow 0$ dobimo za gostoto funkcijo dveh spremenljivk:

$$w(x, y) = \frac{dp(x, y)}{dx dy}. \quad (4.9)$$

Verjetnostno gostoto interpretiramo podobno kot v enorazsežnem primer: $w(x, y)\Delta x \Delta y$ je verjetnost, da pri poskusu zavzame spremenljivka x vrednost v intervalu $x - \frac{1}{2}\Delta x \leq x \leq x + \frac{1}{2}\Delta x$ in

hkrati spremenljivka y vrednost v intervalu $y - \frac{1}{2}\Delta y \leq y \leq y + \frac{1}{2}\Delta y$. To velja, če sta intervala dovolj majhna. Če sta intervala večja, pa je

$$\Delta p = \int_a^b \int_c^d w(x, y) dx dy$$

verjetnost, da pade x znotraj intervala $[a, b]$ in hkrati y znotraj $[c, d]$.

Gostota je normirana z zahtevo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1. \quad (4.10)$$

Če nas zanima le verjetnostna porazdelitev po x in nam je vseeno, kolikšno vrednost zavzame y , velja

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy.$$

Rezultat lahko enostavno posplošimo na 3 in večrazsežne porazdelitve

$$w_k = \frac{\Delta p_k}{\Delta x \Delta y \Delta z} \longrightarrow \frac{dp(x, y, z)}{dx dy dz} = w(x, y, z). \quad (4.11)$$

4.2 Povprečja

4.2.1 Diskretne porazdelitve

Pri Z ponovitvah poskusa izračunamo povprečno vrednost spremenljivke kot

$$\bar{x} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z x_i, \quad (4.12)$$

pri čemer i šteje zaporedne poskuse. Če je Z zelo velik, je takšen način zelo zamuden. Zato raje štejemo, koliko krat pade x_1 , kolikokrat $x_2 \dots x_K$, in tvorimo vsoto

$$\bar{x} = \frac{1}{Z} (N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots) = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^K N_k x_k, \quad (4.13)$$

pri čemer k označuje različne možne izide poskusa. Pri metu kocke so možni izidi $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots x_6 = 6$, torej kar $x_k = k$. Upoštevamo (4.1) in dobimo

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^K p_k x_k. \quad (4.14)$$

Povprečje funkcije spremenljivke x izračunamo podobno:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z f(x_i) = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^K N_k f(x_k) = \sum_{k=1}^K p_k f(x_k). \quad (4.15)$$

Posebej so zanimivi *momenti* porazdelitve:

$$M_n \equiv \overline{x^n} - \bar{x}^n, \quad (4.16)$$

med katerimi je najpomembnejši *efektivni odmik*, *standardna deviacija* ali *efektivna napaka meritve* σ :

$$\sigma^2 \equiv \overline{x^2} - \bar{x}^2. \quad (4.17)$$

4.2.2 Zvezne porazdelitve

Pri poskusu, pri katerem spremenljivka (x) zavzame poljubne vrednosti znotraj nekega območja, izide štejemo po intervalih Δx , na katere smo območje razdelili. Če so intervali dovolj majhni, lahko povprečno vrednost dobimo podobno kot prej:

$$\bar{x} = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^K N_k x_k = \sum_{k=1}^K \Delta p_k x_k, \quad (4.18)$$

pri čemer je x_k kar vrednost x na sredini k -tega intervala. Verjetnost p_k izrazimo z gostoto verjetnosti: $w(x_k) = \Delta p_k / \Delta x$ in dobimo

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^K \Delta w(x_k) \Delta x x_k. \quad (4.19)$$

V limiti $\Delta x \rightarrow 0$ preide vsota v integral

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx. \quad (4.20)$$

Za poljubno funkcijo $f(x)$ pa

$$\overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x) dx. \quad (4.21)$$

Efektivni odmik σ dobimo kot

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx. \quad (4.22)$$

4.3 Tri posebne verjetnostne porazdelitve

4.3.1 Enakomerna

Pri enakomerni diskretni verjetnostni porazdelitvi velja $p_1 = p_2 = \dots = p_K = \text{konst.}$ Vrednost konstante dobimo iz pogoja (4.3):

$$\sum_{k=1}^K p_k = \text{konst} \sum_{k=1}^K 1 = \text{konst} K = 1, \quad \text{konst} = \frac{1}{K}. \quad (4.23)$$

Pri („pravični“) igralni kocki je $K = 6$ in verjetnosti $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$. Povprečno vrednost dobimo kot

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^6 p_k x_k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 x_k = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2} \quad (4.24)$$

in povprečje x^2

$$\overline{x^2} = \sum_{k=1}^6 p_k x_k^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 x_k^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6} \quad (4.25)$$

ter

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{105}}{6}. \quad (4.26)$$

Pri enakomerni zvezni verjetnostni porazdelitvi velja $w(x) = \text{konst}$ na intervalu $[a, b]$ in iz pogoja (4.7) sledi

$$\int_a^b w(x) dx = \text{konst} \int_a^b dx = \text{konst} (b - a) = 1, \quad \text{konst} = \frac{1}{b - a} = \frac{1}{L}, \quad (4.27)$$

pri čemer smo z L označili dolžino intervala. O enakomerni porazdelitvi je v tem primeru smiselno govoriti le v primeru končnega območja vrednosti spremenljivke.

Za povprečno vrednost dobimo

$$\bar{x} = \int_a^b x w(x) dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{a + b}{2}. \quad (4.28)$$

Pri enakomerni zvezni verjetnostni porazdelitvi v dveh razsežnostih, $w(x, y) = \text{konst}$, dobimo

$$\iint_S w(x, y) dx dy = \text{konst} \iint_S dx dy = \text{konst} \iint_S dS = \text{konst} S, \quad \text{konst} = \frac{1}{S}. \quad (4.29)$$

pri tem je S ploščina območja, na katerem je definirana porazdelitev.

Primer: Dežne kapljice padajo enakomerno v posodo s polmerom R . Gostota porazdelitve dežnih kapljic po ploskvi je $w \equiv dp/dS = 1/\pi R^2$.

Pri enakomerni zvezni verjetnostni porazdelitvi v treh razsežnostih dobimo $w \equiv dp/dV = 1/V$.

4.3.2 Eksponentna

Za verjetnostno gostoto velja

$$w(x) = Ae^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (4.30)$$

in 0 za negativne x . Konstanto A dobimo iz (4.7):

$$\int_0^\infty w(x) dx = A \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{A}{\lambda} = 1, \quad A = \lambda. \quad (4.31)$$

Hitro se lahko prepričamo, da je $\bar{x} = 1/\lambda$ in $\sigma = 1/\lambda$.

4.3.3 Gaussova

Verjetnostno gostoto zapišemo kot

$$w_{\bar{x}, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}. \quad (4.32)$$

Porazdelitev ima značilno zvonasto obliko z vrhom pri \bar{x} in širino na polovični višini 2σ . Če povečujemo σ se porazdelitev širi, vrh pa niža obratno sorazmerno s σ . Porazdelitev je že normirana.

4.4 Transformacije spremenljivk

Imamo porazdelitev po izbrani slučajni spremenljivki, želeli pa bi dobiti porazdelitev po neki drugi spremenljivki, ki je povezana s prvo. Izmerili smo na primer porazdelitev svetlobnega toka po valovnih dolžinah λ , želeli pa bi dobiti porazdelitev po frekvencah ν , $\nu = c/\lambda$. Pri drugem primeru spuščamo kroglico z višine h in merimo porazdelitev po časih padanja t , radi pa bi dobili porazdelitev po $g = 2h/t^2$.

V splošnem lahko zapišemo

$$w(y) \equiv \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx} \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{dp}{dx} \left| \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \right|. \quad (4.33)$$

Pri tem smo odvod x po y zapisali z absolutno vrednostjo, saj mora biti porazdelitev *nenegativna*. Tretji izraz smo zapisali za primer, ko je lažje odvajati drugo spremenljivko po prvi spremenljivki.

Pri merjenju težnega pospeška g spuščamo kroglico z višine h in merimo čas padanja t . Izmerimo porazdelitev po izmerjenih časih. Gostoto porazdelitev aproksimiramo kar s konstanto v intervalu $[t_1, t_2]$. Iz zahteve po normalizaciji sledi $w(t) = 1/(t_2 - t_1)$. Zanima nas, kakšna je v tem primeru porazdelitev po pospeških, $g = 2h/t^2$. Uporabimo zvezo (4.33): $w(g) = w(t) |dt/dg|$. Velja $t = \sqrt{2h/g}$ in $dt/dg = -\frac{1}{2}\sqrt{2h}g^{-3/2}$. Predznak $-$ pride zato, ker se g zmanjšuje, ko se t povečuje. Dobimo

$$w(g) = w(t) \left| \frac{dt}{dg} \right| = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{2h}}{2} g^{-3/2}. \quad (4.34)$$

Preverimo, če je dobljena porazdelitev normirana. Porazdelitev integriramo od najmanjšega g , ki ustreza največjemu času t_2 , do največjega g , ki ustreza t_1 :

$$\begin{aligned} \int_{g_2}^{g_1} w(g) dg &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{2h}}{2} \int_{g_2}^{g_1} g^{-3/2} dg = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{2h}}{2} (-2)g^{-1/2} \Big|_{g_2}^{g_1} \\ &= -\frac{1}{(t_2 - t_1)} \left(\sqrt{\frac{2h}{g_1}} - \sqrt{\frac{2h}{g_2}} \right) = -\frac{1}{(t_2 - t_1)} (t_1 - t_2) = 1. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Za dežne kapljice, ki enakomerno padajo v valjasto posodo s polmerom R , smo izpeljali gostoto $w(S) = 1/\pi R^2$. Če nas zanima porazdelitev po oddaljenosti od središča posode r , velja

$$w(r) = w(S) \frac{dS}{dr} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{2\pi r dr}{dr} = \frac{2r}{R^2}. \quad (4.36)$$

Vidimo, da je največja verjetnost, da kapljice padajo na rob posode pri $r = R$. Hitro se še prepričamo

$$\int_0^R w(r) dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R r dr = \frac{2}{R^2} \frac{R^2}{2} = 1. \quad (4.37)$$

4.5 Binomska porazdelitev

Pri poskusu nas zanimata le dva možna izida: da se izbran dogodek zgodi ali pa se ne zgodi. Pri metu kocke je lahko izbrani dogodek met šestice. Verjetnost za izbrani dogodek naj bo p ($1/6$ pri

metu kocke), verjetnost za kateri koli drugi dogodek pa $q = 1 - p$ (5/6 pri kocki). Zanima nas verjetnost, da se pri Z ponovitvah poskusa izbrani dogodek dogodi N krat.

Do odgovora pridemo z naslednjim razmislekom. Najprej se vprašajmo, kolikšna je verjetnost za izbrano zaporedje dogodkov, pri katerem se najprej N krat zgodi izbrani dogodek, nato pa se $Z - N$ krat ne zgodi. Verjetnost za več dogodkov je kar produkt verjetnosti za posamezen dogodek: da se zgodi enkrat je p , dvakrat je p^2 , trikrat $p^3 \dots$ in N krat p^N . Podobno je verjetnost, da se $Z - N$ izbrani dogodek ne zgodi, q^{Z-N} , skupna verjetnost pa

$$P = p^N q^{Z-N}. \tag{4.38}$$

Rezultat moramo pomnožiti še s številom vseh možnih razporedov dogodkov, pri katerih se izbrani izid pojavi N krat. Problem je enak problemu iz kombinatorike, pri katerem razporejamo N enakih kroglic na Z možnih mest (seveda mora biti $Z \geq N$). To pa je ravno število kombinacij brez ponavljanja:

$$C_Z^N = \binom{Z}{N} = \frac{Z!}{N!(Z-N)!} \tag{4.39}$$

Tu je $\binom{Z}{N}$ binomski koeficient, ki ga srečamo v formuli

$$(a + b)^Z = a^Z + Z a^{Z-1}b + \frac{Z^2}{2} a^{Z-2}b^2 + \dots + \binom{Z}{N} a^{Z-N}b^N \dots + b^Z = \sum_{N=0}^Z \binom{Z}{N} a^{Z-N}b^N. \tag{4.40}$$

Binomske koeficiente lahko izračunamo po formuli (4.39) ali poiščemo v *Pascalovem trikotniku*:

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
...												

Končni rezultat je *binomska* ali *Bernoullijeva* porazdelitev:

$$P_N^Z = \binom{Z}{N} p^N q^{Z-N}. \tag{4.41}$$

Porazdelitev je že normirana

$$\sum_{N=0}^Z P_N^Z = \sum_{N=0}^Z \binom{Z}{N} p^N q^{Z-N} = (p + q)^Z = 1^Z = 1. \tag{4.42}$$

Pri računanju povprečne vrednosti si pomagamo s trikrom. Namesto p pišimo λp , pri čemer je λ parameter, ki ga bomo na koncu računa postavili na 1. Povprečna vrednost je definirana kot

$$\bar{N} = \sum_{N=0}^Z N P_N^Z = \sum_{N=0}^Z N \binom{Z}{N} (\lambda p)^N q^{Z-N} \Big|_{\lambda=1} = \lambda \frac{d}{d\lambda} \sum_{N=0}^Z \binom{Z}{N} (\lambda p)^N q^{Z-N} \Big|_{\lambda=1}$$

Z/N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$$= \lambda \frac{d}{d\lambda} (\lambda p + q)^Z \Big|_{\lambda=1} = \lambda Z p (\lambda p + q)^{Z-1} \Big|_{\lambda=1} = pZ, \quad (4.43)$$

kar bi lahko že vnaprej uganili. Precej bolj zahteven je izračun napake σ . Ponovno si pomagamo z opisanim trikom. Drugi odvod po parametru λ izračunajmo na dva načina

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{N=0}^Z \binom{Z}{N} (\lambda p)^N q^{Z-N} \Big|_{\lambda=1} &= \sum_{N=0}^Z \binom{Z}{N} N(N-1) p^2 (\lambda p)^{N-2} q^{Z-N} \Big|_{\lambda=1} \\ &= \sum_{N=0}^Z (N^2 - N) \binom{Z}{N} p^N q^{Z-N} = \overline{N^2} - \bar{N}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Po drugi strani, pa je izraz na levi odvod binoma:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} (\lambda p + q)^Z \Big|_{\lambda=1} = Z(Z-1) p^2 (\lambda p + q)^{Z-2} \Big|_{\lambda=1} = (Z^2 p^2 - Z p^2) 1^{Z-2} = Z^2 p^2 - Z p^2 \quad (4.45)$$

Ko izenačimo oba končna izraza in upoštevamo $pZ = \bar{N}$, dobimo

$$\overline{N^2} - \bar{N}^2 = \bar{N} - p^2 Z = pZ - p^2 Z = pqZ \quad (4.46)$$

in

$$\sigma = \sqrt{\overline{N^2} - \bar{N}^2} = \sqrt{pqZ}. \quad (4.47)$$

Zgled: Vrzimo 10 krat kovanec in poiščimo porazdelitev po število izidov, ko je padla cifra. V tem primeru je $Z = 10$, $p = q = \frac{1}{2}$ in

$$P_N^{Z=10} = \binom{10}{N} \frac{1}{2}^N \frac{1}{2}^{10-N} = \binom{10}{N} \frac{1}{2}^{10} = \frac{1}{1024} \binom{10}{N}. \quad (4.48)$$

Binomske koeficiente razberemo kar iz zadnje v vrstice v tabeli; rezultat je porazdelitev, simetrična okoli $N = 5$. Prav tako je 5 povprečna vrednost in $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 10} = \sqrt{10}/2 \approx 1,58$. Širina porazdelitve je torej enaka $2\sigma \approx 3,2$, o čemer se lahko prepričamo, če porazdelitev narišemo.

Če nas zanima, kolikšna je verjetnost, da pade cifra vsaj 7 krat, moramo sešteti verjetnosti da pade 7, 8, 9 in 10 krat, torej:

$$P_{N \geq 7}^{10} = \sum_{N=7}^{10} P_N^{Z=10} = \frac{1}{1024} (120 + 45 + 10 + 1) = \frac{176}{1024} \approx 17 \%. \quad (4.49)$$

4.6 Poissonova porazdelitev

Formalno dobimo Poissonovo porazdelitev kot limito binomske ko gre $Z \rightarrow \infty$ in $p \rightarrow 0$, a tako, da ostane povprečna vrednost $\bar{N} = pZ$ končna. Namesto z dvema (neodvisnima) parametroma p in Z je porazdelitev določena z enim samim parametrom \bar{N} .

$$P_N^{\bar{N}} = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{Z!}{N!(Z-N)!} \left(\frac{\bar{N}}{Z}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{N}}{Z}\right)^{Z-N}, \quad (4.50)$$

pri čemer smo za p vstavili $p = \bar{N}/Z$. Uporabimo Stirlingovo formula za izračun fakultete velikih števil in z nekaj napora dobimo

$$P_N^{\bar{N}} = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}. \quad (4.51)$$

Spremenljivka N lahko zavzame vsa naravna števila in 0. Hitro se lahko prepričamo, da je porazdelitev normirana

$$\sum_{N=0}^{\infty} P_N^{\bar{N}} = e^{-\bar{N}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} = e^{-\bar{N}} \left(1 + \bar{N} + \frac{1}{2!}\bar{N}^2 + \frac{1}{3!}\bar{N}^3 + \dots\right) = 1, \quad (4.52)$$

saj smo v oklepaju dobili ravno vrsto za eksponentno funkcijo $e^{\bar{N}}$. Za napako (standardno deviacijo) dobimo

$$\sigma = \lim_{Z \rightarrow \infty} \sqrt{pqZ} = \sqrt{\bar{N}} \quad (4.53)$$

saj gre v tej limiti $q \rightarrow 1$ in $pZ \rightarrow \bar{N}$.

Poissonova porazdelitev je ena temeljnih porazdelitev v fiziki in statistiki; navedimo tu zgled iz vsakdanjega življenja. V tabeli LPP preberemo, da avtobus vozi na vsakih 5 min. Iz vsakdanjega izkustva pa vemo, da avtobusi na postajo ne prihajajo enakomerno v predpisanih intervalih, pač pa precej slučajno. Če torej na postaji stojimo pol ure, bi teoretično našli 6 avtobusov, v praksi pa najbrž temu ne bi bilo tako; 6 lahko interpretiramo kot *povprečno* število avtobusov. Fizik bi lahko vpeljal *tok* avtobusov kot število avtobusov, ki v povprečju pride na časovno enoto, $\Phi = N/t$. V našem primeru bi bil tok 12/h ali 0,2/min. Število avtobusov, ki jih lahko pričakujemo v času t , izračunamo kot $N = \Phi t$. V 12 min bi tako recimo dobili dobili $N = 2,4$, kar interpretiramo kot *povprečno število*. Kaj pa, če je časovni interval zelo kratek? V 1 minuti bi dobili 0,2 avtobusa, čemur bi težko rekli povprečno število. V tem primeru rezultat raje interpretiramo kot *verjetnost*, da v času ene minute pride avtobus. To ni čisto res, saj bi se lahko zgodilo, da bi v tem času prišla dva avtobusa, ali celo trije. A če gremo k zelo kratkim časom, ko je verjetno že znatno manjša od 1, lahko možnost večjega števila avtobusov odmislimo.

Denimo, da nas zanima porazdelitev po številu avtobusov v primerno dolgem časovnem intervalu t . Do porazdelitve pridemo tako, da si mislimo časovni interval t razdeljen na Z zelo kratkih časovnih intervalov $\Delta t = t/Z$. Potem lahko izraz $\Phi \Delta t = \Delta t/t_0 = p$ interpretiramo kot verjetnost, da se zgodi izbrani dogodek, tj. prihod avtobusa v času Δt . Čakanje na avtobus smo torej razstavili na zaporedje Z dogodkov; pri dogodku bodisi dobimo želeni izidi (avtobus pride) z verjetnostjo p ali pa se to z verjetnostjo $q = 1 - p$ ne zgodi. Porazdelitev je torej binomska. Ker pa želimo imeti čim krajše intervale (da bo interpretacija z verjetnostjo smiselna), gre $p \rightarrow 0$ in hkrati $Z \rightarrow \infty$ in binomska porazdelitev preide v Poissonovo (4.51).

V fiziki srečamo podoben problem pri *radioaktivnih razpadih*. Jedra radioaktivnih atomov razpadajo povsem slučajno; namesto o *toku* v primeru avtobusov, tu govorimo o *aktivnosti*, $A = N/t$, tj. številu razpadov v časovni enoti. Aktivnost je odvisna od velikosti vzorca ter od vrste jedra. Tudi v tem primeru je število razpadov v izbranem času t porazdeljeno po *Poissonovi* porazdelitvi s povprečnim številom $\bar{N} = At$.

Denimo, da nas zanima, kolikšna je verjetnost, da avtobusa ne bo treba čakati več kot 7 minut. V tem primeru je $\bar{N} = t/t_0 = 1,4$ in verjetnost, da v tem času pride avtobus

$$P_{N=1}^{\bar{N}} = \frac{\bar{N}^1}{1!} e^{-\bar{N}} = 1,4 e^{-1,4} = 0,345. \quad (4.54)$$

A seveda to ni edini ugodni izid. Za nas je ravno tako ugodno, če v tem času pride 2, 3, 4, ... avtobusov; torej moramo sešteti vse verjetnosti tja do neskončno:

$$P_{N \geq 1}^{\bar{N}} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} \quad (4.55)$$

Seveda bomo računali le do člena, ko pade verjetnost na primerno majhno vrednost, a kljub temu utegne biti takšen račun zamuden. Pomagamo si z razmislekom: če bi imeli v vsoti še člen z $N = 0$, bi bila to ravno normalizacijska vsota (4.52). Zato velja ($\bar{N}^0 = 1$ in $0! = 1$):

$$P_{N \geq 1}^{\bar{N}} = 1 - P_{N=0}^{\bar{N}} = 1 - e^{-\bar{N}} = 0,753. \quad (4.56)$$

4.7 Prehod na Gaussovo porazdelitev

Če je Z zelo velik, je težko izračunati binomske koeficiente. Pomagamo si lahko na dva načina:

$p \ll 1$ v tem primeru binomska preide v Poissonovo in računamo s Poissonovo,

$\bar{N} \gg 1$ v tem primeru tako binomsko kot Poissonovo nadomestimo z Gaussovo porazdelitvijo:

$$\begin{aligned} P_N^{Z,p} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(N-\bar{N})^2/2\sigma^2}, & \bar{N} &= pZ, & \sigma &= \sqrt{p(1-p)Z}, \\ P_N^{\bar{N}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(N-\bar{N})^2/2\sigma^2}, & \sigma &= \sqrt{\bar{N}}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

pri čemer si diskretno binomsko ali Poissonovo porazdelitev predstavljamo kot porazdelitev po zvezni spremenljivki N , sestavljeno iz stolpcev z višino P_N in širino 1 ($\Delta N = 1$). Vrednost za izbran N pripišemo *sredini* stolpca, torej stolpec sega od $N - \frac{1}{2}$ do $N + \frac{1}{2}$.

Če nas zanima verjetnost za N v intervalu $[N_1, N_2]$:

$$P_{N_1 \leq N \leq N_2} = \sum_{N_1}^{N_2} P_N, \quad (4.58)$$

vsoto prevedemo na integral Gaussove funkcije. Zahtevamo, da je ploščina pod stolpci, ki ustrezajo intervalu $[N_1, N_2]$, enaka ploščini pod Gaussovo funkcijo. Ker obravnavamo N kot zvezno spremenljivko, moramo upoštevati, da integracijske meje tečejo od začetka prvega stolpca pri $N_1 - \frac{1}{2}$ do konca zadnjega stolpca pri $N_2 + \frac{1}{2}$:

$$\sum_{N_1}^{N_2} P_N \Delta N \approx \int_{N_1 - \frac{1}{2}}^{N_2 + \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(N-\bar{N})^2/2\sigma^2} dN, \quad \Delta N = 1. \quad (4.59)$$

Integral Gaussove funkcije ni elementarna funkcija. Njene vrednosti najdemo v tabeli. Tabelirana je funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \quad (4.60)$$

V integralu (4.59) uvedemo novo spremenljivko $t = (N - \bar{N})/\sigma$ in dobimo

$$\int_{N_1 - \frac{1}{2}}^{N_2 + \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(N-\bar{N})^2/2\sigma^2} dN = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (4.61)$$

$$x_1 = \frac{N_1 - \frac{1}{2} - \bar{N}}{\sigma}, \quad x_2 = \frac{N_2 + \frac{1}{2} - \bar{N}}{\sigma}. \quad (4.62)$$

Ker je funkcija tabelirana le za pozitivne x , moramo upoštevati še

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \quad (4.63)$$

Zgled: Verjetnost, da študent pade na izpitu pri predmetu A je 20 %. Kolikšna je verjetnost, da od 30 študentov, ki pride na izpit, izpit naredi vsaj 21 študentov.

Gre za binomsko porazdelitev s $Z = 30$ in verjetnostjo $p = 0,2$, da izpita študent ne naredi. Zanima nas verjetnost, da 9 ali manj študentov pade:

$$P_{N \leq 9}^{Z,p} = \sum_{N=0}^9 \binom{30}{N} p^N (1-p)^{30-N} \quad (4.64)$$

Vsoto lahko izračunamo le s pomočjo računalnika in dobimo

$$P_{N \leq 9}^{Z,p} = 0,938. \quad (4.65)$$

Ker je p pa sorazmerno majhen, lahko poskusimo do rezultata priti tako, da uporabim namesto binomske porazdelitve Poissonovo z $pZ = \bar{N} = 6$:

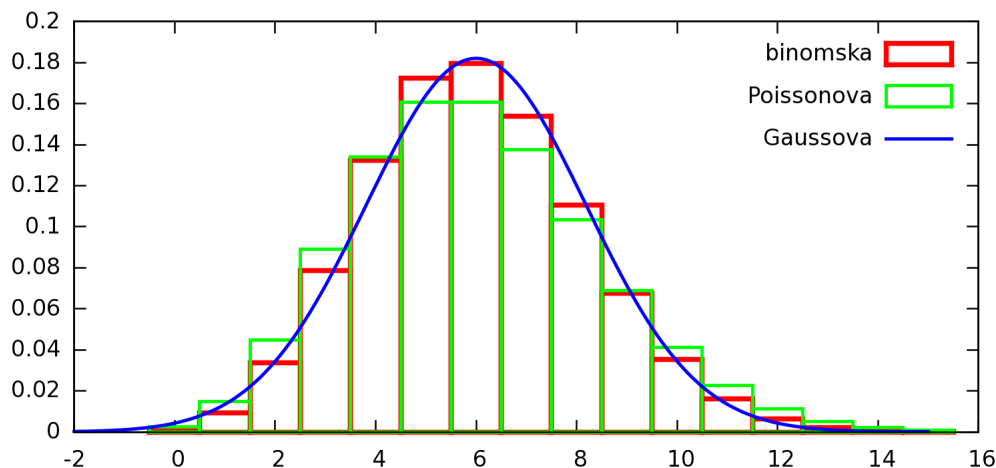
$$P_{N \leq 9}^{Z,p} \approx P_{N \leq 9}^{\bar{N}=pZ} = e^{-6} \sum_{N=0}^9 \frac{6^N}{N!} = e^{-6} \left(1 + 6 + \frac{36}{2} + \frac{216}{6} + \dots \right) = 0,916, \quad (4.66)$$

kar je kar zamudno. Poskusimo še s prevedbo na Gaussovo, pri tem teče N od $-\frac{1}{2}$ do $9\frac{1}{2}$. Izračunajmo

$$\bar{N} = 6, \quad \sigma = \sqrt{p(1-p)Z} = 2,19, \quad x_1 = \frac{-0,5 - 6}{2,19} = -2,97, \quad x_2 = \frac{9,5 - 6}{2,19} = 1,60,$$

$$P_{N \leq 9}^{Z,p} \approx \Phi(1,60) - \Phi(-2,97) = \Phi(1,60) + \Phi(2,97) = 0,4452 + 0,4986 = 0,9438. \quad (4.67)$$

Napovedi se razlikujeta skoraj za 3 %, Gaussova aproksimacija je bliže pravi vrednosti, kar pomeni, da pri $p = 0,2$ Poissonova porazdelitev ni zelo dobra aproksimacija binomske porazdelitve.



4.8 Porazdelitev χ^2

4.8.1 Primerjava izmerjene in teoretične porazdelitve

Pri poskusu z igralno kocko smo izmerili porazdelitev verjetnosti za posamezne izide. Verjetnosti $p_k, k = 1, \dots, 6$ se med seboj razlikujejo. Zanima nas, ali so razlike le posledica statističnih odstopanj, ali pa lahko na podlagi meritve trdimo, da kocka ni „pravična“ in so nekateri izidi bolj verjetni kot drugi.

Pri statističnih odstopanjih pričakujemo, da bo število ponovitev izbranega izida znotraj intervala $\pm \sigma$ okoli povprečne vrednosti, določene z $\bar{N}_k = p_k Z$. Pri 120 ponovitvah bi bila pričakovana povprečna vrednost 20, odstopanje pa $\sigma = \sqrt{pqZ} \approx 4,10$. Če bi torej dobivali rezultate v intervalu med 16 in 24, vsekakor ne bi mogli trditi, da kocka ni pravična. Tudi če bi bila odstopanje pri katerem od možnih izidov nekoliko večja, bi to še vedno ne bil razlog, da bi spremenili mnenje. V primeru zelo velikih odstopanj, pa bi najbrž že lahko trdili da kocka ni pravična.

Želeli bi dobiti kvantitativni kriterij, na podlagi katerega bi lahko dali bolj zanesljivo oceno.

Za kriterij izberemo število, imenujemo ga *hi kvadrat*, ki je vpeljemo kot

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - \bar{N}_k)^2}{\sigma_k^2}, \quad (4.68)$$

pri čemer so N_k izmerjene vrednosti, \bar{N}_k pa teoretične vrednosti, ki smo jih dobili na podlagi neke predpostavke ali modela – recimo predpostavke, da je igralna kocka pravična. Dobro ujemanje

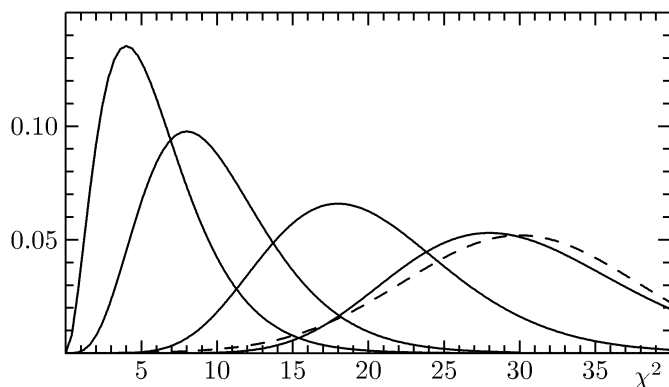
pomeni, da so odstopanja od teoretične vrednosti le *statistična*. Tedaj lahko dobimo grobo oceno tako, da števce v členih vsote (4.68) nadomestimo z njihovo povprečno vrednostjo, $(N_k - \bar{N}_k)^2 \approx \sigma_k^2$. Potem je vrednost izraza (4.68) kar enaka številu K .

Pri bolj natančni oceni moramo upoštevati, da N_k med seboj niso neodvisni, saj so povezani z enačbo $\sum_{k=1}^K N_k = Z$. V tem primeru je povprečna vrednost χ^2 pri statističnih odstopanjih enaka $K - 1$. Število $K - 1 \equiv f$ (namesto f pišemo tudi ν) je število *neodvisnih prostostnih stopenj*. V splošnem je enako številu spremenljivk zmanjšanim za število enačb (vezi), ki povezujejo spremenljivke.

Koliko sme vrednost χ^2 odstopati od povprečne vrednosti f , da lahko odstopanja še proglašimo za statistična? Če bi meritev velikokrat ponovili (velikokrat bi na primer po 120 krat vrgli kocko), bi dobili porazdelitev po številu χ^2 . Porazdelitev je odvisna od enega samega parametra, in sicer števila prostostnih stopenj f . Verjetnostna gostota, ki ustreza porazdelitvi χ^2 , ima značilno zvonasto obliko in je pri velikem številu prostostnih stopenj vedno bolj podobna Gaussovi porazdelitvi z vrhom pri f in širino $\sigma_{\chi^2} \approx \sqrt{2f - 1}$:

$$w_{\chi^2(f)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{f/2}\Gamma(\frac{f}{2})} x^{f/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

Za dobro ujemanje je potemtakem smiselno proglašiti vse izide, ki padejo v primerno izbran



Slika 4.1: Verjetnostna gostota porazdelitve $\chi^2(f)$ za vrednosti f 6, 10, 20 in 30. Črtkano je narisana Gaussova gostota, ki ustreza vrednosti $f = 30$.

interval okoli vrha, na primer v interval $[f - 2\sigma_{\chi^2}, f + 2\sigma_{\chi^2}]$. Verjetnost, da pri odstopanjih, ki so le statistična, pade vrednost χ^2 *znotraj* tega intervala, je 95 %. (Pri tolerantnejšem pristopu lahko dopustimo še nekoliko širši interval, na primer deviacijo v okviru $3\sigma_{\chi^2}$.)

Kaj pa, če naša vrednost ne pade znotraj tega intervala? Možnosti sta dve:

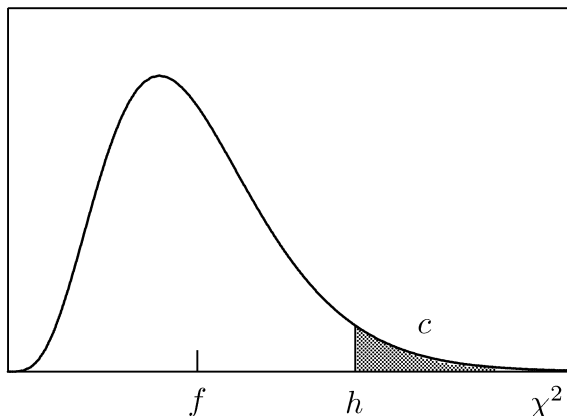
- χ^2 je znatno večji, potem
 - funkcija oz. fizikalni model ni dober,
 - ali pa so napake izmerkov slabo ocenjene; v resnici so veliko *večje*,
- χ^2 je znatno manjši, potem

- utegnejo biti napake izmerkov slabo ocenjene; v resnici so veliko *manjše*,
- ali pa so bili izmerki – blago rečeno – prilagojeni modelu.

Zavedati se moramo, da dobro ujemanje še vedno ne pomeni, da je fizikalni model *pravilen*. Pri bistveno bolj natančni meritvi bi se prav lahko pokazalo, da je model napačen. Seveda, od statistike ne moremo in ne smemo pričakovati, da bi nam nedvoumno povedala, ali je model pravilen. Da dobimo smiseln odgovor moramo pravzaprav vprašanje obrniti drugače: ali obstaja statistično utemeljen razlog, da model lahko zavržemo? Pritrdilnemu odgovoru na takšno vprašanje priredimo določeno *zanesljivost*, $p = 1 - c$, pri čemer je c verjetnost, da χ^2 zavzame večjo vrednost od neke mejne vrednosti, $\chi^2 = h$, torej

$$c = \int_h^{\infty} w_{\chi^2(f)}(x) dx . \quad (4.70)$$

Nazorno nam c predstavlja ploščino osenčenega lika pod krivuljo na sliki.



Vrednost c lahko interpretiramo kot verjetnost, da so kljub velikemu izmerjenemu χ^2 odstopanja še vedno slučajna (statistična). Pri zelo majhnih izmerjenih χ^2 , ko je ujemanje pretirano dobro, sta interpretaciji p in c zamenjani. S p torej merimo zanesljivost, s katero model *zavrնemo*; če modela ne moremo zavrնiti, pa vrednosti p nikakor ne smemo in ne moremo interpretirati kot verjetnost, da je model pravilen. Model je prav lahko popolnoma napačen, tudi če je izmerjeni χ^2 – pač slučajno – manjši od števila prostostnih stopenj.

Zanesljivost p (oziroma c) pogosto predpišemo vnaprej: kot kriterij za zavrնitev modela vzamemo $p = 0,95, 0,99$ ali $0,999$. V primeru večjega števila prostostnih stopenj, ko porazdelitev lahko nadomestimo z Gaussovo, ustreza 95 % zanesljivosti interval $[f - 2\sigma_{\chi^2}, f + 2\sigma_{\chi^2}]$, intervalu $[f - 3\sigma_{\chi^2}, f + 3\sigma_{\chi^2}]$ pa priredimo zanesljivost 99,7 %.

Zgled: Pri 120 metih kocke smo dobili naslednje izide 30, 20, 15, 10, 15, 20 za vrednosti 1, 2, 3, 4, 5, 6. Postavimo t.i. *ničelno hipotezo*: izmerjena odstopanja so le posledica statističnih napak zaradi majhnega vzorca. Zanima nas, ali lahko ničelno hipotezo zavrնemo z verjetnostjo 95 % (99 %). Izračunamo $\bar{N}_k = 20, k = 1 \dots, 6, f = 6 - 1 = 5$:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^6 \frac{(N_k - 20)^2}{20} = 12,5 .$$

V Tabeli III za 95 % zanesljivost velja $c = 1 - 0,95 = 0,05$ in ugotovimo, da je mejna vrednost χ^2 pri $f = 5$ enaka 11,07. Ker je naša vrednost *večja* od te vrednosti, lahko ničelno hipotezo zavrնemo z

verjetnostjo 95 %. Kako pa je z 99 % zanesljivostjo? V tem primeru je $c = 0,01$ in je mejna vrednost 15,09, kar je več od izmerjene vrednosti. Ničelne hipoteze s tolikšno zanesljivostjo ne moremo zavreči.

4.8.2 Primerjava dveh izmerjenih porazdelitev

Pogosto bi radi ugotovili, ali se dve izmerjeni porazdelitvi razlikujeta le zaradi statističnih napak, ali pa so razlike tolikšne, da lahko s precejšnjo zanesljivostjo trdimo, da sta porazdelitvi različni. Primerjamo recimo uspeh učencev v dveh razredih tako za vsak razred izračunamo porazdelitev učencev po ocenah od 1 do 5. V tem primeru tvorimo

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k^A - N_k^B)^2}{\sigma_k^2} = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k^A - N_k^B)^2}{N_k^A + N_k^B}. \quad (4.71)$$

4.8.3 Preverjanje modelov pri merjenjih

Denimo, da merimo odvisnost med dvema fizikalnima količinama x in y , in bi radi preverili, če se izmerjena odvisnost ujema s teoretično napovedjo $y = f(x)$, kjer je f znana analitična funkcijska odvisnost (recimo premica $f(x) = kx + n$). Tudi v tem primeru si pomagamo z enakim kriterijem, kot pri primerjanju izmerjene in teoretične porazdelitve. Tvorimo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.72)$$

Tu je $f = N - M$; N je število meritev, M število prostih parametrov v funkcijski odvisnosti ($M = 2$ v primeru premice) in σ_i napaka odvisne spremenljivke y_i .

Zgornje formulo lahko uporabimo za določitev merskih napak. Denimo, da merskih napak ne poznamo, verjamemo pa, da so odstopanja od modela le statistična. Če še predpostavimo, da so vse napake enake: $\sigma_i = \sigma, i = 1, \dots, N$, lahko hitro dobimo oceno za napako σ :

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2 = N - M, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2}{N - M}}. \quad (4.73)$$

Literatura

- I. Kuščer, A. Kodre, Matematika v fiziki in tehniki, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994, poglavja: 2., 3., 4., 11.
- I. Vidav, višja matematika II, poglavja Trigonometrijske vrste (R. Jamnik), Vektorska analiza (B. Krušič, I. Vidav, M. Vencelj), Verjetnostni račun in statistika (R. Jamnik) (izbrane vsebine), DZS Ljubljana 1979. (Navedena poglavja so na voljo tudi v ločenih publikacijah:
 - R. Jamnik, Trigonometrijske vrste. Stieltjesov integral. Lebesguov integral, DMFA Slovenije in ZOTK Slovenije, Ljubljana, 1986
 - B. Krušič, I. Vidav, M. Vencelj, Dvojni in mnogoterni integral. Diferencialna geometrija v prostoru. Vektorska analiza, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1990)
 - R. Jamnik, Verjetnostni račun in statistika, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1995