Matematične metode v fiziki II – naloge

9. september 2014

Kazalo

Poglavje 1

Navadne diferencialne enačbe (NDE)

1.1 NDE 1.reda

1. Zapiši enačbo za praznjenje kondenzatorja in enačbo za polnjenje kondenzatorja in jih reši.

2. Na zaporedno vezana kondenzator (C) in upornik (R) priključimo napetost, ki s časom linearno narašča, tako da v času Δt naraste od 0 na U_0. Kako se s časom spreminja napetost na kondenzatorju?

3. Na zaporedno vezana dušilko z induktivnostjo $L = 0{,}10$ H in upornik z $R = 100\ \Omega$ priključimo konstantno napetost $U_0 = 24$ V. Kako se s časom spreminja tok skozi dušilko?

4. Na zaporedno vezana dušilko z induktivnostjo $L = 0{,}10$ H in upornik z $R = 100\ \Omega$ priključimo napetost, ki s časom linearno narašča, tako da v času Δt naraste od 0 na U_0. Kako se s časom spreminja tok skozi dušilko?

5. *Na zaporedno vezana kondenzator (C) in upornik (R) priključimo sinusno napetost $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Kako se s časom spreminja napetost na kondenzatorju, če je bil ob času $t = 0$ prazen?

6. Vakuumska pumpa izsesava iz posode stalen prostorninski tok zraka Φ_V. Kako pojema tlak, če obenem doteka od zunaj skozi majhno luknjico v posodo stalen masni tok zraka Φ_m? [$p(t) = p_\infty + (p_0 - p_\infty) \exp(-\Phi_V t/V)$, $p_\infty = RT\Phi_m/M\Phi_V$.]

7. Počrnjena segreta bakrena krogla s specifično toploto 380 J/kgK, gostoto 8,9 g/cm^3 in radijem 1 cm visi v evakuirani posodi. V kolikšnem času se ohladi od 500 °C na 100 °C, če je temperatura posode 20 °C?

8. V pokončen valjast sod s površino osnovne ploskve 1 m^2 priteka 1 l vode na sekundo. Na dnu soda je okrogla luknjica s površino 3 cm^2. Kako narašča gladina vode v sodu od trenutka, ko smo jo začeli natakati? Čez koliko časa bo gladina 25 cm nad dnom? *Rešitev*: $t = 2\tau[\sqrt{h_0/h_\infty} - \sqrt{h_0/h_\infty} - \ln[(1-\sqrt{h/h_\infty})/(1-\sqrt{h_0/h_\infty})]$, $h_\infty = \Phi_V^2/2\pi^2 r^4 g$, $\tau = h_\infty S/\Phi_V$.

9. V poln škaf doteka voda v stalnem curku in odteka čez rob. V škaf vržemo nekaj barvila. Voda se tako močno meša, da je barvilo ob vsakem času enakomerno porazdeljeno. Kako pojema koncentracija s časom? [$c(t) = c_0 \exp\left(-\Phi_V t/V\right)$.]

10. V hladilnik, damo 50 kg živil s povprečno specifično toploto 4000 J/kgK. Na začetku je temperatura živil in hladilnika enaka zunanji temperaturi 20°C. Površina vseh sten hladilnika je 2 m^2, debelina 2 cm, toplotna prevodnost izolacije pa 0,1 W/mK. Toplotno kapaciteta hladilnika je majhna v primerjavi s toplotno kapaciteto živil.

    a) Čez koliko časa doseže temperatura v notranjosti 90% končne, če hladilnik deluje s konstantno močjo 300 W? [12,2 h]
    b) Kako pa se spreminja temperatura v primeru, če je moč ob vklopu 500 W, nato pa linearno pada tako, da po 6 urah doseže nič?

    [$x = t/t_0$, $t_0 = 6$ h, $y = (T - T_0)/T_1$, $T_0 = 20$°C, $T_1 = P_0 t_0/mc_p = 54$ K, $\beta = -\lambda S T_1/P_0 d$.]

11. V hladilno torbo damo 10 kg živil s povprečno specifično toploto 4000 J/kgK. Na začetku je temperatura živil enaka 10°C. Površina vseh sten torbe je 1 m^2, debelina 2 cm, toplotna prevodnost izolacije pa 0,1 W/mK. Toplotno kapaciteta torbe je majhna v primerjavi s toplotno kapaciteto živil. Kolikšna je temperatura po 6 urah, če se zunanja temperatura spreminja linearno, tako da v 6 urah naraste z začetne temperature 20°C na 30°C? [$T(t) = T_0 + kt + (T_1 - T_0 - k\tau)(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau = mc_p d/S\lambda = 8000$ s, $k = (T_2 - T_1)/\Delta t$, $T(\Delta t) = 25{,}9$°C.]

12. *Kondenzator praznimo preko upornika iz cekasa s specifičnim uporom 1 Ωmm^2/m, gostoto 8 kg/dm^3, specifično toploto 400 J/kgK, radijem 1 mm in $RC = 5$ s. Žice je obdana z 0,1 mm debelo plastjo toplotne izolacije s toplotno prevodnostjo 0,1 W/mK. Kako se spreminja temperatura žice?

13. *Podobno kot prejšnja le da na žico namesto kondenzatorja priključimo izvir izmenične napetosti z amplitudo 100 V in frekvenco 50 Hz.

14. Oceni, v kolikšnem času se ohladi počrnjena žarilna nitka s 1000°C do 100°C, če se ohlaja le s sevanjem. Premer nitke je 0,2 mm, dolžina 20 cm, specifična gostota 10 kg/dm^3, specifična toplota 400 J/kgK in $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Nitka prejema energijski tok iz okolice pri temperaturi 0°C?

15. *Na zaporedno vezana kondenzator s kapaciteto $C = 100$ μF in upornik z $R = 10$ kΩ priključimo napetost, ki eksponentno pojema s časom kot $U = U_0 e^{-\alpha t}$, $U_0 = 24$ V, $\alpha = 2$ s^{-1}. Na začetku na kondenzatorju ni naboja. a) Pokaži, da na začetku teče skozi vezje tok 2,4 mA. b) Kolikšen tok teče v vezju po 1 s? c) Ob katerem času je naboj na kondenzatorju največji?

1.2 Homogena NDE 2. reda

1. Na zračni drči miruje voziček z maso 500 g, ki je z vzmetjo s $k = 18$ N/m pritrjen ob eno krajišče drče. Kako voziček niha, kolikšna je amplituda nihanja in kolikšen je odmik po 1 s v primerih, ko na začetku voziček:

a) odmaknemo za 10 cm in spustimo,

b) v mirovni legi sunemo s hitrostjo 60 cm/s,

c) odmaknemo za 5 cm in sunemo s hitrostjo 30 cm/s proti mirovni legi,

d) odmaknemo za 5 cm in sunemo s hitrostjo 30 cm/s proč od mirovne lege?

2. Kondenzator s kapaciteto $C = 1\ \mu$F nabijemo na napetost 24 V in zaporedno vežemo z dušilko z 0,1 mH in zanemarljivim notranjim uporom. Kako se spreminja tok v vezju in kako napetost na kondenzatorju? (Upoštevaj, da zaradi dušilke tok v vezju ne more trenutno narasti na končno vrednost.)

3. Majhno kroglico, obešeno na 1 m dolgi lahki vrvici, odklonimo za kot 5° iz mirovne lege in sunemo s hitrostjo 0,2 m/s proti mirovni legi. Kako kroglica niha? Nariši graf (ne pozabi na enote). Kolikšna je amplituda nihanja? Kolikšen je fazni premik glede na nihanje kroglice, ki bi jo spustili hkrati s prvo (torej z začetno hitrostjo 0)? Namig: Rešitev naloge prepiši v obliko $s_0 \cdot \cos(\omega t + \delta)$. *Rešitev*: $\omega = \sqrt{g/l} = 3{,}16\ \mathrm{s}^{-1}$, $s_0 = \sqrt{(\varphi_0 l)^2 + (v_0/\omega)^2} = 0{,}108$ m, $\delta = \mathrm{atan}\,(v_0/\omega\varphi_0 l) = 0{,}63$.

4. Na zračni drči miruje voziček z maso 500 g, ki je z vzmetjo s $k = 18$ N/m pritrjen ob eno krajišče drče. Na voziček sta pritrjena močna magneta, ki ustvarjata zaviralno silo $F_u = -Bv$, $B = 3$ kg/s. Kolikšen je odmik vozička od mirovne lege 0,3 s po tem, ko smo ga odmaknili iz mirovne lege za 10 cm in spustili?

5. Enako kot 4. naloga, z začetnimi pogoji kot pri 1.b) – 1.d).

6. Reši nalogi 4. in 5. v primeru, če vzamemo mehkejšo vzmet s $k = 2$ N/m.

7. Kroglico iz jekla z gostoto 7,6 g/cm^3 in radijem 0,5 cm obesimo na vzmet s konstanto 0,04 N/m in potopimo v tekočino z viskoznostjo 0,1 kg/ms.

   a) Zapiši enačbo nihanja in določi koeficient dušenja (β) ter lastno frekvenco nihanja.

   b) Zapiši časovni potek nihanja, če ob $t = 0$ nihalo odmaknemo iz mirovne lege za 5 cm in spustimo.

8. Kondenzator s kapaciteto $C = 1\ \mu$F nabijemo na napetost 24 V in zaporedno vežemo z upornikom za 10 Ω in dušilko za 0,1 mH. Kako se spreminja tok v vezju od trenutka, ko elemente sklenemo?

9. Kroglico iz jekla z gostoto 7,6 g/cm^3 in radijem 0,5 cm obesimo na vzmet s konstanto 0,04 N/m. Na kroglici je naboj 10^{-9} As. Kroglico povlečemo navzdol za 5 cm in spustimo. Ko doseže mirovno lego, vključimo časovno konstantno in prostorsko homogeno električno polje z jakostjo $E = 10^5$ V/m, ki ima enako smer kot težni pospešek. Pokaži, da po vključitvi električnega polja lahko zapišemo nihanje v obliki $x = A\cos(\omega t + \delta) + C$ in izračunaj parametre A, C, ω in δ. *Rešitev*: $\omega = 3{,}16\ \mathrm{s}^{-1}$, $A = 5{,}6$ cm, $C = -2{,}5$ cm, $\delta = 63{,}5°$.

10. Na stojalu je na lahki vrvici z dolžino 1 m obešena kroglica. Stojalo nenadoma premaknemo za 5 cm. Kako zaniha kroglica, če je na začetku mirovala? V trenutku,

ko ima kroglica največjo hitrost in se giblje v smeri proti prvotni mirovni legi, stojalo hitro premaknemo nazaj v prvotni položaj. Kako sedaj niha kroglica? *Rešitev*: $s = s_0(1 - \cos\omega t)$, $\omega = \sqrt{g/l}$, $s_0 = 5$ cm; $s = s_0(\cos\omega t - \sin\omega t)$.

11. Na navpični vzmeti s konstanto $k = 10$ N/m je obešena kilogramska utež. Utež niha z amplitudo 0,2 m. Ko je vzmet najbolj skrčena, pričnemo zgornje krajišče vzmeti nenadoma premikati z enakomerno hitrostjo 0,3 m/s navpično navzgor. S kolikšno amplitudo niha nihalo med premikanjem? *Rešitev*: $s_0 = 22$ cm.

1.3 Nehomogena NDE 2. reda

1. Resonančno krivuljo prepiši v brezdimenzijsko obliko $y = [(1 - x^2)^2 + (bx)^2]^{-1/2}$ in izrazi b z β in ω_0. Skiciraj krivuljo za nekaj značilnih vrednosti b. Poišči maksimum. Pri kolikšnem a izgine resonančni vrh? Določi širino krivulje na polovični višini za $b \ll 1$.

2. Na zračni drči miruje voziček z maso 500 g, ki je z vzmetjo s $k = 18$ N/m pritrjen ob eno krajišče drče. Na voziček sta pritrjena močna magneta, ki ustvarjata zaviralno silo $F_u = -Bv$, $B = 3$ kg/s. Ob času $t = 0$ prične na voziček delovati sila $F = F_0 \cos\omega t$, $F_0 = 0{,}8$ N, s frekvenco, ki je enaka lastni frekvenci vozička ω_0

   a) Kolikšna je amplituda nihanja po zelo dolgem času?
   b) Poišči splošno rešitev, veljavno tudi za majhne čase.

   Rešitev: a) $s_p = F_0/2m\omega_0\beta = 4{,}4$ cm , $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\beta = B/2m$,
   b)$s(t) = (F_0/2m\omega_0\beta)\ \left[\sin\omega_0 t - (\omega_0/\omega')\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega' t\right]$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

3. Kroglico iz jekla z gostoto 7,6 g/cm^3 in radijem 0,5 cm obesimo na vzmet s konstanto 0,04 N/m in potopimo v tekočino z viskoznostjo 0,1 kg/ms.

   a) Zapiši enačbo nihanja in izračunaj koeficient dušenja (β) ter lastno frekvenco nihanja.
   b) Zapiši časovni potek nihanja, če ob $t = 0$ nihalo v mirovanju sunemo s hitrostjo 15 cm/s.
   c) Kolikšna je amplituda nihanja po dolgem času, če nihalo vzbujamo s silo $F(t) = F_0 \cos\omega t$, $F_0 = 1$ N in $\omega = 4$ s^{-1}?

   Rešitev: a) $\omega_0' = 2{,}93$ s^{-1}, $\beta = 1{,}2$ s^{-1}, b) $s(t) = B\mathrm{e}^{-\beta t}\sin\omega_0' t$, $B = 5{,}11$ cm, c) $s = 19{,}6$ cm.

4. Na mirujoče nedušeno harmonično torzijsko nihalo nenadoma začne delovati sinusno nihajoč navor $M(t) = M_0 \sin\omega t$ s frekvenco ω, ki je enaka 9/10 lastne frekvence nihala. Kako niha nihalo? *Rešitev*: $\varphi(t) = M_0\left(\sin\omega t - (\omega/\omega_0)\sin\omega_0 t\right)/J(\omega_0^2 - \omega^2)$, $\omega_0^2 = D/J$.

5. Na sinusno izmenično napetost 220 V in 50 nihajev na sekundo, priključimo tuljavo z induktivnostjo 2 H in uporom 100 Ω ter kondenzator s kapaciteto 4 μF. Kolikšna je

efektivna napetost na kondenzatorju? *Rešitev*: $\hat{U} = \hat{U}_0/\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} =$ 896 V.

6. Na zaporedno vezana tuljavo (0,1 H, 10 Ω) in kondenzator (0,5 μF) nenadoma pritisnemo napetost 100 V, ki ostane potem stalna. Kako se spreminja tok? Kako se spreminja napetost na kondenzatorju? Skiciraj oboje.
Rešitev: $U_C = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}(\cos\omega t + (\beta/\omega)\sin\omega t)\right)$, $\beta = R/2L = 50\ \mathrm{s}^{-1}$,
$\omega = \sqrt{1/LC - \beta^2} = 4{,}47 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

7. Na zaporedno vezana tuljavo (0,1 H, 10 Ω) in kondenzator (0,4 μF) priključimo napetost $U_g(t) = U_0 \sin\omega t$, $U_0 = 24$ V, $\omega = 6 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$. Kako se spreminja tok v vezju?

8. Na zaporedno vezana tuljavo (0,1 H, 60 Ω) in kondenzator (40 μF), na katerem na začetku ni bilo naboja, pritisnemo napetost, ki linearno narašča s časom, tako da v 1 s sekundi naraste od 0 do 100 V.

   a) Brez računanja *skiciraj* časovni potek toka v vezju in napetosti na kondenzatorju.
   b) Izračunaj, kako se spreminja tok.
   c) Izračunaj še napetost na kondenzatorju in na dušilki.

1.4 Sistemi NDE 2. reda (sklopljena nihala)

1. Na telo z maso $m_1 = 4$ kg, ki visi na vzmeti s konstanto $k_1 = 18$ N/m, obesimo preko vzmeti s konstanto $k_2 = 14$ N/m drugo telo z maso $m_2 = 7$ kg. Določi lastna nihanja sistema. Kako sistem niha, če na začetku potegnemo drugo telo za 2 cm iz mirovne lege, prvo telo držimo v mirovni legi in nato obe telesi spustimo? *Rešitev*: $\omega_1 = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega_2 = 3\ \mathrm{s}^{-1}$, $s_1 = A\cos\omega_1 t + C\cos\omega_2 t$, $s_2 = 2A\cos\omega_1 t - 2C/7\,\cos\omega_2 t$, $A = -C = 14/16$ cm.

2. Na telo z maso $m_1 = 3$ kg, ki visi na vzmeti s konstanto $k = 100$ N/m, obesimo preko enake vzmeti drugo telo z maso $m_2 = \frac{2}{3}m_1 = 2$ kg. a) Določi lastne frekvence sistema. b) Določi razmerje amplitud pri prvem in pri drugem lastnem nihanju. c) Kako moramo izbrati začetne pogoje, da dobimo prvo lastno nihanje, in kako, da dobimo drugo? Odgovori z besedami na podlaga rezultata pri b).

3. Iz dveh tankih metrskih palic in dveh kilogramskih uteži, ki ju obesimo na konca palic, sestavimo dve enaki nihali. Uteži zvežemo s tanko napeto vijačno vzmetjo s $k = 0{,}1$ N/m. Za koliko % se razlikujeta lastna nihajna časa takšnega sestavljenega nihala? Kakšno nihanje dobimo, če na začetku levo nihalo odmaknemo za 4° v levo, desno pa za 3° v desno?

4. Na zračno drčo postavimo prvo telo z maso $m_1 = 3$ kg in drugo telo z maso $m_2 = \frac{2}{3}m_1 = 2$ kg in ju povežemo z vzmetjo s konstanto $k = 120$ N/m.

   a) Določi lastne frekvence sistema. [0, 10 s^{-1}]
   b) S kolikšno amplitudo niha drugo telo glede na težišče, če niha prvo telo z amplitudo 4 cm? [−6 cm]

c) Ob času $t = 0$ je prvo telo odmaknjeno za 2 cm iz svoje mirovne lege in se giblje s hitrostjo 30 cm/s v smeri koordinatne osi, drugo telo pa je odmaknjeno za -3 cm in se giblje v isti smeri kot prvo s hitrostjo 15 cm/s. Zapiši, kako se spreminja lega prvega telesa s časom. [$s_1 = a + bt + A\cos\omega t + B\sin\omega t$, $a = 0$, $A = 2$ cm, $b = 24$ cm/s, $B = 0{,}6$ cm]

d) Kolikšna je hitrost drugega telesa po 1 s? [15,2 cm/s]

5. Poišči lastna nihanja molekule CO_2. V približku obravnavamo sistem kot enodimenzionalno verigo O—C—O, ki lahko niha le v vzdolžni smeri.

a) Določi elastično konstanto k, ki ustreza vezi C—O, če sta izmerjeni frekvenci longitudinalnih nihanj $3{,}998 \cdot 10^{13}$ Hz in $7{,}042 \cdot 10^{13}$ Hz. Atomska masa O je 16, C pa 12 osnovnih enot; osnovna enota je $1{,}660 \cdot 10^{-27}$ kg. *Rešitev*: $\omega_1^2 = k/m_O$, $\omega_2^2 = k(2m_O + m_C)/m_O m_C$, $\omega_3 = 0$, $\omega_2/\omega_1 = 1{,}91$, eksp.: 1,76; $k = m_O\omega_1^2 = 1700$ N/m

b) Za koliko % se spremeni razmerje (dveh neničelnih) lastnih frekvenc, če C^{12} nadomestimo z izotopom C^{14}?

6. Na zračni drči lebdita telesi z masama po 3 kg in 1 kg, ki sta povezani z vzmetjo s $k = 3$ N/m. Na začetku lažje telo potisnemo za 5 cm proti težjemu in sunemo s hitrostjo 10 cm/s proti težjemu. Hkrati spustimo tudi težje telo (tako, da ima na začetku hitrost 0). Zapiši, kako se telesi gibljeta po tem, ko ju spustimo.

7. Na zračni drči mirujeta telesi z masama 200 g in 400 g, ki sta povezani z vzmetjo s $k = 1$ N/m. Tretje telo z maso 200 g se giblje s hitrostjo 1 m/s in popolnoma neprožno trči z lažjim telesom, tako da po trku ostaneta sprijeta. Opiši gibanje sistema teles po trku. Trk je bil zelo kratkotrajen. *Rešitev*: $s_1 = B\sin\omega t + v^* t$, $s_2 = -B\sin\omega t + v^* t$, $\omega^2 = k(m_1 + m_2 + m_3)/(m_1 + m_3)m_2 = 5{,}0\ \mathrm{s}^{-2}$, $v^* = m_3 v_0/(m_1 + m_2 + m_3) = 0{,}25$ m/s, $B = v_0/4\omega = 11$ cm.

Poglavje 2

Fourierova analiza

2.1 Fourierova analiza

1. Skozi računalniško vezje potuje periodičen signal s periodo $T = 1\mu$ s, ki ima v eni periodi obliko:
$$U(t) = \begin{cases} U_0 = 5\ \mathrm{V}\,, & 0 < t < T/2 \\ 0\,, & T/2 < t < T \end{cases}$$
   a) Katere frekvence nastopajo v spektru?
   b) Zapiši prvih nekaj členov v Fourierovi vrsti.
   c) Kolikšen del moči odpade na enosmerno komponento in kolikšen na komponento z n-to frekvenco?

2. Podobno kot 1. naloga, le da ima signal obliko
$$U(t) = \begin{cases} U_0 = +5\mathrm{V}\,, & 0 < t < T/2 \\ U_0 = -5\mathrm{V}\,, & T/2 < t < T \end{cases}$$

3. Podobno kot 1. naloga, le da ima signal obliko
$$U(t) = \begin{cases} U_0 = 5\ \mathrm{V}\,, & T/4 < t < T/2 \\ 0\,, & \text{sicer} \end{cases}$$

4. Podobno kot 1. naloga, le da ima signal „žagasto“ obliko s periodo $T = 20\ \mu$s:
$$U(t) = \frac{U_0}{T}\,t\,, \qquad U_0 = 5\ \mathrm{V}\,.$$

5. Usmerniški mostiček daje napetost $U(t) = U_0|\sin\omega_0 t|$, $U_0 = 310$ V, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\nu_0 = 50$ Hz.
   a) Kolikšna povprečna moč se troši na uporu 100 Ω?
   b) Katere frekvence nastopajo v spektru?
   c) Kolikšen del moči odpade na enosmerno komponento in kolikšen na komponento s prvo in z drugo frekvenco?

Rešitev: a) $P = U_0^2/2R = 480$ W, b) $\omega_n = 2\omega_0 n$, c) enosmerna komponenta $P_0/P = 8/\pi^2$, $P_1/P = 16/9\pi^2$, $P_2/P = 16/15^2\pi^2$, $P_3/P = 16/35^2\pi^2, \ldots$

6. Nek generator daje periodične sunke s periodo T naslednje oblike: napetost v hipu naraste do maksimalne vrednosti U_0, potem pa s časovno konstanto β^{-1} eksponentno pojema do naslednjega sunka. Prikaži spekter tega nihanja. Kolikšni deleži povprečne moči, ki jo prejema priključeni upornik R, odpadejo na enosmerno komponento in kolikšni na posamezne harmonične komponente?

7. *Nariši spekter sinusnega nihanja, ki se začne v trenutku, ko je odmik enak nič, konča pa po desetih nihajih. Določi širino spektralne črte.

8. *Neki akustični analizator določi frekvenco tona na 1 Hz natančno. Na podlagi rezultata pri prejšnji nalogi oceni, najmanj kako dolgo mora ton trajati, da je tako točna določitev frekvence sploh mogoča.

9. *Izračunaj spekter dušenega nihanja $f(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega' t)$. Kje ima spekter maksimum? Izračunaj širino krivulje na polovični (maksimalni) višini.

Poglavje 3

Vektorski račun in parcialne diferencialne enačbe

3.1 Gradient, divergenca, rotor

Gradient

1. Izračunaj grad r, če je r razdalja od izhodišča. Podobno izračunaj še:

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,, \qquad \operatorname{grad}\Big((\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})\Big)\,, \qquad \operatorname{grad}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^2}\right)\,, \qquad \operatorname{grad}\left(\vec{a}\cdot\hat{r}\right)\,.$$

   če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ konstantna vektorja.

2. Izračunaj električno poljsko jakost v osi enakomerno naelektrene tanke krožne zanke tako, da najprej izračunaš potencial. Poskusi tudi z direktnim izračunom poljske jakosti.

   Rešitev: $U = e/4\pi\varepsilon_0\sqrt{r_0^2+z^2}$, $\vec{E} = (e/4\pi\varepsilon_0)\,z(r_0^2+z^2)^{-3/2}\,(0,0,1)$

3. Izračunaj električno poljsko jakost, ki jo na osi x povzroča naboj $+e$, enakomerno razmazan v intervalu $-\frac{1}{2}l < x < \frac{1}{2}l$ tako, da najprej izračunaš potencial. Preveri, da dobiš pričakovan izraza za $x \gg l$.

   Rešitev: $\vec{E} = e/4\pi\varepsilon_0(1/(x^2-l^2/4),0,0)$

4. Izračunaj in s sliko prikaži potek silnic in ekvipotencialnih ploskev okrog točkastega električnega dipola (dveh nasprotnih nabojev na razdalji d, $\vec{p} = e\vec{d}$, $d \ll r$). Električno poljsko jakost izračunaj kot gradient potenciala. Rezultat za prazen prostor:

$$U = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\,\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]\,.$$

Divergenca

6. Verificiraj za polje točkastega naboja, da je div $\vec{D} = 0$.

7. Podobno kot prejšnja naloga za polje enakomerno naelektrene ravne žice in za polje enakomerno naelektrene ravnine.

8. Pokaži, da velja $\nabla \cdot (\vec{r}/r) = 2/r$.

9. Pri najpreprostejšem modelu za notranjost Zemlje si predstavljamo homogeno kroglo s konstantno gostoto energijskih izvirov q. Če privzamemo, da je stanje stacionarno, dobimo gostoto toplotnega toka, ki pri radiju r teče navzven, iz skupne moči izvirov do tega radija: $j = \frac{4}{3}\pi r^3 q/4\pi r^2 = \frac{1}{3} rq$. Pokaži, da velja kontinuitetna enačba.

10. V elektronki s planparalelnima elektrodama je potencial takole odvisen od razdalje x od katode: $U(x) \propto x^{4/3}$. Kako je s poljsko jakostjo in gostoto naboja?

11. Zapiši magnetno polje dolgega ravnega vodnika in preveri, da je div $\vec{B} = 0$. $[\vec{B} = (\mu_0 I/2\pi r^2)\,(-y, x, 0)]$

12. Električno poljsko jakost v vodikovem atomu zapišemo kot

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{2a}{r^2} + \frac{a^2}{r^3}\right) \mathrm{e}^{-2r/a}\,\vec{r}\,,$$

pri čemer je a Bohrov radij. Pokaži, da je gostota naboja enaka

$$\rho_e(\vec{r}) = -\frac{e_0}{\pi a^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,, \qquad r \neq 0\,.$$

Rotacija

13. Med planparalelnima ploščama se giblje viskozna tekočina. Izračunaj rotacijo polja. (Zapiši hitrostni profil tekočine za primer, ko se zgornja plošča giblje s konstantno hitrostjo, poišči komponente hitrosti in izračunaj rot $\vec{v}$)

14. Po ravni žici teče enosmeren tok. Zapiši magnetno polje znotraj in zunaj žice ter preveri, da je zunaj rot $\vec{H} = 0$, znotraj pa rot $\vec{H} = \vec{j}_e$. $[\vec{H}_n = (I/2\pi R^2)\,(-y, x, 0)$, $\vec{H}_z = (I/2\pi r^2)\,(-y, x, 0)]$

15. Magnetno polje znotraj vodnika z radijem $R = 1$ cm ima komponente

$$H_x = -A\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) y\,, \qquad H_y = A\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) x\,, \qquad H_z = 0\,,$$

če je $A = 10^4\ \mathrm{A/m^2}$ in je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ razdalja od osi vodnika.

   a) Izračunaj, kako se z radijem r spreminja gostota toka v vodniku.
   b) Kolikšen je celotni tok, ki teče v vodniku? Zapiši komponente magnetnega polja zunaj vodnika.

Rešitev: a) $j_z = 2A(1 - r^2/R^2)$, b) $I = \pi R^2 A = 3{,}14$ A, c) $H_0 = R^2 A/2r$, $H_x = -H_0 y/r$, $H_y = H_0 x/r$, $H_z = 0$.

16. Magnetno polje znotraj vodnika z radijem $R = 1$ cm ima komponente

$$H_x = -Ar^2 y\ , \qquad H_y = Ar^2 x\ , \qquad H_z = 0\ ,$$

če je $A = 10^7$ A/m^4 in je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ razdalja od osi vodnika.

    a) Pokaži, da je polje brez izvirov.
    b) Izračunaj, kako se z radijem r spreminja gostota toka v vodniku.
    c) Zapiši komponente magnetnega polja zunaj vodnika.

    Rešitev: b) $\vec{j} = (0, 0, 4Ar^2)$, c) $H_x = -H_0\, y/r$, $H_y = H_0\, x/r$, $H_z = 0$, $H_0 = AR^4/r$

17. Pokaži, da za konstantno polje $\vec{B}$ velja rot$\vec{A} = \vec{B}$ in div$\vec{A} = 0$, če je $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$.

18. *V nekem vrtincu se vrti voda tako, da je izven stržena rot $\vec{v} = 0$. Kako pojema tam hitrost in kotna hitrost z razdaljo od osi vrtinca? Rezultat: $v = C/2\pi r$, če je $C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$. Koeficient C se imenuje *cirkulacija*.

3.2 PDE

1. Izračunaj polje enakomerno nabite krogle z radije R za $r < R$ in $r > R$ na dva načina: iz Gaussovega zakona in z reševanjem Poissonove (Laplaceove) enačbe za U.

2. Enako za polje enakomerno nabite dolge ravne žice z radijem R.

3. Izračunaj polje med ploščama dolgega valjastega kondenzatorja, če poznaš napetosti pri obeh radijih.

4. Izračunaj temperaturni profil med ploščama kondenzatorja, ki je napolnjen z dielektrikom, če sta plošči pri konstanti temperaturi T_0 in je kondenzator priključen na napetost U_0. Poznaš specifični upor, gostoto in toplotno prevodnost dielektrika.

5. V 1 mm debeli bakreni žici, ki je obdana s talečim se ledom, tako da je na površju $T = 0$ °C, je tok 10 A. Kolikšna je temperatura na sredini? Specifični upor bakra je 0,017 Ωmm^2/m, toplotna prevodnost 380 W/mK.

6. Bakrena cev z notranjim radijem 2 mm, zunanjim 4 mm, po kateri teče tok 500 A, je znotraj hlajena s tekočo vodo, zunaj pa je toplotno izolirana. Za koliko je temperatura na zunanji površju višja kot na notranji? Drugi podatki so pri prejšnji nalogi.
   Rešitev: $T(r) - T(R) = \left(I^2\zeta/\lambda\pi^2R^2(1 - r^2/R^2)^2\right)\left(1 - r^2/R^2 + 2(r^2/R^2)\ln(r/R)\right) =$ 0,013 K

7. Pri študiju toplotnih tokov v telesu človeško telo v prvem približku aproksimiramo z valjem z višino 1,7 m in radijem 12 cm, napolnjenim z vodo. Človek oddaja 100 W, temperatura v notranjosti (pri $r = 0$) je 37 °C, toplotna prevodnost vode je $\lambda = 0,6$ W/mK.

a) Kolikšna mora biti temperatura kože, da bo človek oddal vso toploto v okolico? Predpostavimo, da toplotni tok teče le v radialni smeri.

b) Kolikšna naj bo debelina oblačila iz snovi s toplotno prevodnostjo $\lambda = 0{,}12$ W/mK, da človeka ne bo zeblo pri temperaturi -20 °C. Oblačilo aproksimiramo z votlim valjem z notranjim radijem 12 cm.

Rešitev: a) $T_1 = T_0 - P/4\pi\lambda l = 29$ °C . b) $\Delta r = r_1(e^{2\pi\lambda' l(T_1-T_2)/P} - 1) = 10{,}5$ cm .

8. V razsežni steni iz snovi s toplotno prevodnostjo 1 W/mK in z debelino 20 cm so enakomerno porazdeljeni toplotni izviri z gostoto moči 1000 W/m^3. Steno izoliramo na vsaki strani s 5 cm debelima plastema iz snovi s toplotno prevodnostjo 2 W/mK. Zunanja temperatura je ves čas 0 °C.

   a) Izračunaj temperaturo na sredini notranje stene.

   b) Skiciraj temperaturni profil v vseh treh stenah.

9. Bakrena cev z notranjim radijem 0,5 mm in zunanjim 1 mm je znotraj toplotno (in električno) izolirana, zunanji plašč pa držimo pri stalni temperaturi. Specifični upor bakra je 0,017 Ωmm^2/m, toplotna prevodnost 380 W/mK.

   a) Kolikšen največji električni tok sme teči po vodniku, da temperatura med notranjim in zunanjim plaščem ne preseže 100 K?

   b) Kolikšna je v tem primeru gostota toplotnega toka, ki jo oddaja zunanji plašč, in kolikšna moč, ki jo moramo odvajati na meter vodnika?

10. Sredica reaktorja v obliki krogle z močjo 1 kW in radijem 1 m ima temperaturo plašča 100 °C.

    a) Kolikšna je temperatura na sredini reaktorja, če je povprečna toplotna prevodnost 0,2 W/mK? Predpostavi, da so izviri enakomerno porazdeljeni po sredici reaktorja.

    b) Kolikšna pa je temperatura zunanjega plašča z radijem 2 m, če prostor med sredico in zunanjim plaščem obliva voda s toplotno prevodnostjo 0,6 W/mK?

11. Gorilni element, v katerem so enakomerno porazdeljeni radioaktivni izviri s močjo 10 kW, ima obliko valjaste cevi z notranjim radijem 5 cm, zunanjim radijem 10 cm in dolžino 1 m. Toplotna prevodnost snovi je 0,2 W/mK. V notranjosti cevi je tekočina s temperaturo 20 ° C. Obdaja ga izolacijska cev iz snovi z enako toplotno prevodnostjo kot v gorilnem elementu, z notranjim radijem 10 cm (enakim zunanjemu radiju gorilnega elementa) in zunanjim radijem 15 cm, ki jo obdaja voda s temperaturo 20 ° C. Kolikšna je temperatura na zunanjem plašču gorilnega elementa?
    [$T(r_2) = (\ln\frac{r_3}{r_2}/\ln\frac{r_3}{r_1})\, q(2r_2^2\ln\frac{r_2}{r_1} - (r_2^2 - r_1^2))/4\lambda + T_0,\, q = P/\pi(r_2^2 - r_1^2)l.$]

12. Kolikšna je temperatura v središču Zemlje, če predpostavimo, da so radioaktivni izviri enakomerno porazdeljeni v zemeljski sredici $r < r_1$, $r_1 = R/2$ ($R = 6400$ km), v plašču med radijem r_1 in površjem pa izvirov ni. Temperaturni gradient tik pod površjem Zemlje je $dT/dr = -0{,}014$ K/m. Skiciraj temperaturni profil. *Rešitev*: $T(r = 0) = 2R|dT/dr| + T_0 = 1{,}8 \cdot 10^5$ K.

13. Kolikšna je temperatura v središču Zemlje, če predpostavimo, da radioaktivni izviri *niso* enakomerno porazdeljeni v zemeljskem plašču, temveč se njihova gostota *linearno* povečuje od vrednosti 0 v središču Zemlje do največje vrednosti na površju ($R = 6400$ km). Temperaturni gradient tik pod površjem Zemlje je $dT/dr = -0{,}014$ K/m.

3.3 Maxwellove enačbe, valovna enačba

1. Iz Gaussovega zakona ali kako drugače določi jakost električnega polja za neskončno dolg valj s polmerom R, znotraj katerega je enakomerno razmazan naboj z gostoto ρ. Izračunaj rotacijo polja za $r \geq R$ in $r < R$ ter preveri, če se rezultat ujema z napovedjo ustrezne Maxwellove enačbe. [$E_x = E\,x/r$, $E_y = E\,y/r$, $E = e/2\pi\varepsilon_0 l r$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$.]

2. Iz zakona o magnetni napetosti določi gostoto magnetnega polja v valjastem vodniku z notranjim radijem 1 mm in zunanjim radijem 2 mm, v katerem teče tok 10 A. Izračunaj $\mathrm{div}\,\vec{B}$ in preveri, če je rezultat skladen z napovedjo ustrezne Maxwellove enačbe. [$B_x = -B\,\frac{y}{r}$, $B_y = B\,\frac{x}{r}$, $B = \mu_0 I_0 (r^2 - r_1^2)/2\pi(r_2^2 - r_1^2)r$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\mathrm{div}\vec{B} = 0$.]

3. Zapiši za raven potujoči elektromagnetni val $\vec{E}$ in $\vec{B}$ kot funkcijo časa in kraja. Pokaži, da iz Maxwellovih enačb sledi $\vec{E} = -\vec{c} \times \vec{B}$.

Poglavje 4

Verjetnostni račun in osnove statistike

4.1 Porazdelitve

1. Pri kockanju s pravilno kocko je $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = 1/6$. Izračunaj $\bar{x}$ in σ.
2. Za enakomerno porazdelitev $w(x) = A$, $a \leq x \leq b$ in $w(x) = 0$ zunaj tega intervala, določi konstanto A, $\bar{x}$ in σ.
3. Enako za eksponentno porazdelitev $w(x) = A\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
4. Na isti sliki nariši enakomerno porazdelitev pri nalogi 2 in Gaussovo porazdelitev,
$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] .$$
ki ima enak $\bar{x}$ in σ kot enakomerna porazdelitev.
5. Pri merjenju težnega pospeška spuščamo kroglico z višine $h = 75$ cm in z ročno štoparico merimo čase padanja t. Gostoto porazdelitve po časih aproksimiramo kar s konstanto v intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$, $t_1 = 0{,}3$ s, $t_2 = 0{,}5$ s.
   a) Pokaži, da lahko gostoto porazdelitve po pospeških ($g = 2h/t^2$) zapišemo kot
   $$w(g) \equiv \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}g} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \frac{\sqrt{2h}}{2} g^{-3/2} .$$
   b) Izračunaj povprečno vrednosti pospeška.
   c) Za koliko se ta vrednost razlikuje od vrednosti, ki bi jo dobil, če bi računal s povprečno vrednostjo časa?
   Na vprašanji pri b) in c) seveda lahko odgovoriš, ne da bi rešil nalogo pri a)
6. V funkcijskih tabelah smejo vrednosti biti napačne kvečjemu za $\pm 0{,}5$ zadnje decimalne enote. V teh mejah je porazdelitev dostikrat enakomerna. Izračunaj za ta primer σ.
7. Otrok na dvorišču brca žogo v steno. Porazdelitev strelov po hitrosti žoge je $dp/dv = Av^3$, in sicer od 0 do maksimalne hitrosti $v_0 = 3$ m/s.

a) Določi normalizacijsko konstanto A.

b) Nariši graf porazdelitve strelov po hitrosti žoge kot funkcijo hitrosti žoge. Na grafu označi karakteristične točke.

c) Kolikšna je povprečna hitrost žoge?

d) Zapiši porazdelitev hitrosti žoge po času letenja žoge do stene, če je otrok od stene oddaljen 10 m. Porazdelitev po času letenja izrazi s časom t in parametroma s in v_0. (Žoga se giblje nepospešeno, torej njeno gibanje opisuje enačba $s = vt$.)

8. Razpršilec ustvari množico kapljic, katerih porazdelitev po masi opišemo z linearno funkcijo,

$$w(m) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = \begin{cases} A(m_0 - m) & m \leq m_0 \\ 0 & m > m_0 \end{cases}$$

a) Določi normalizacijsko konstanto A.

b) Izračunaj povprečno maso kapljice. (Rezultat izrazi z m_0).

c) Zapiši porazdelitev po radijih kapljic $w(r) = \mathrm{d}p/\mathrm{d}r$. Podana je gostota kapljic ρ; kapljice imajo obliko kroglic.

d) Izračunaj povprečni radij kapljic.

Rezultat pri c) in d) izrazi z r in parametrom r_0, ki ustreza kapljici z največjo možno maso.

9. Vzporeden curek enobarvne svetlobe pada na stekleno kroglo z lomnim količnikom n, tako da je vsa krogla v curku. Porazdelitev presečišč žarkov z ravnino, pravokotno na smer širjenja svetlobe, je enakomerna. Določi porazdelitev po lomnem kotu β. Preveri, če je porazdelitev normirana. *Rešitev*: $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\beta = n^2 \sin 2\beta$

10. Zelo majhne, popolnoma prožne gladke kroglice padajo navpično na vodoravno ležeč tog valj in se odbijajo. Točke, kjer si mislimo, da bi kroglice (če se ne bi odbile) prebodle osni presek valja, so po tem preseku enakomerno porazdeljene. Kakšna je smerna porazdelitev (porazdelitev po kotu, za katerega se odklonijo) kroglic tako po odboju?

11. Skozi kroglo gre snop žarkov, ki se nič ne lomijo in nič ne absorbirajo. Njihova porazdelitev naj bo enakomerna po preseku, ki je pravokoten na smer potovanja žarkov. Vsak žarek definira tetivo na krogli. Kakšna je porazdelitev teh tetiv glede na njihovo dolžino?

12. Notranja stena votle krogle je premazana s tanko plastjo snovi, ki seva delce alfa. Določi porazdelitev delcev glede na dolžino njihove poti po notranjosti krogle, pri čemer naj bo doseg delce večji od notranjega premera krogle.

13. Izračunaj povprečni kosinus odklonskega kota za odboj kroglic na valju (naloga 9).

14. V sredini planparalelne plošče seva točkast izvir delce alfa enakomerno na vse strani. Doseg delcev je ravno enak debelini plošče.

a) Kolikšna je verjetnost, da delec alfa zapusti ploščo?

b) Kolikšna je povprečna pot delcev alfa v plošči? *Rešitev*: a) $\frac{1}{2}$, b) $\bar{l} = \frac{1}{2}l(\ln 2 + 1) = 0{,}85\, l$.

15. Vzporeden curek delcev gama vpada na zelo dolg valj s premerom 10 cm, ki delcev praktično ne absorbira. Delci vpadajo pravokotno glede na osni presek valja in so enakomerno porazdeljeni po tem preseku.

    a) Zapiši porazdelitev žarkov glede na dolžino njihovih poti v valju.

    b) Kolikšna je povprečna dolžina poti v valju?
    Rešitev: a) $w(z) = z/4R\sqrt{(2R)^2 - z^2}$, b) $\pi R/2$

4.2 Binomska in Poissonova porazdelitev

1. Nekdo ima veliko število žarnic, izmed katerih je 1% defektnih. Na slepo izbere 50 žarnic. Kolikšna je verjetnost, da ni med temi nobene defektne, ali samo 1, 2, 3, ...?

2. Neka tovarna dela tranzistorje. Od tega je 10% izmeta. Na slepo izberemo 100 (1000) tranzistorjev. Izračunaj verjetnost, da bo med temi manj kot 8% slabih.

3. Žitno mešanico analizirajo s štetjem zrn. Pri nekem žitu so našteli 850 zrn pšenice in 150 zrn rži in potem navedli, da je v žitu 85% pšenice in 15% rži. Kako natančen je ta rezultat? [$p = 0{,}85 \pm 0{,}011$]

4. 3,5 % šoloobveznim deklicam je ime Lana.

    a) Kolikšna je verjetnost, da v razredu s 15 deklicami ni nobene Lane?

    b) Kolikšna pa je verjetnost, da jih je v šoli s 300 deklicami vsaj 10?

5. V neki državi volivci povsem slučajno glasujejo za štiri stranke. Kolikšna je verjetnost, da na volišču, na katerega pride 100 volivcev, dobi stranka A več kot 30 % glasov?

6. Po neki cesti pelje v povprečju 1200 avtomobilov na uro. Kolikšna je verjetnost, da se bo pred semaforjem, ki je zaprt dve minuti, nabralo več kot 45 avtomobilov?

7. V nekem mestu vozijo trolejbusi povsem neredno. V povprečju jih pelje skozi postajo 12 na uro. Kolikšna je verjetnost, da na trolejbus ni treba čakati več kot 7 minut?

8. Zemeljsko površje doseže v povprečju 25 meteorjev na dan. Kolikšna je verjetnost, da bo v 10 letih na vsem svetu ($4 \cdot 10^9$ ljudi) najmanj enega človeka zadel meteor? Radij Zemlje je 6400 km, efektivni presek človeka za meteorje pa 0,2 m^2. [13,2 %]

9. Pripraviš test z 9 vprašanji; pri vsakem naj učenec med tremi ponujenimi odgovori (a, b, ali c) obkroži tistega, za katerega misli, da je pravilen. Obkroži lahko le en odgovor. Kolikšna je verjetnost, da učenec, ki o snovi nima najmanjšega pojma, odgovori pravilno na več kot polovico vprašanj? (14,5 %)

10. Po neki cesti pelje v povprečju 30 avtomobilov na uro. Predpostavimo, da vsak avtomobilist rad vzame avtostoparja in sicer vsak natanko enega. Kolikšna je verjetnost, da od 4 avtostoparjev, ki čakajo, po 10 minutah ne bo nobenega več?

11. Ob 12h pričnejo prihajati v planinski dom izletniki, v povprečju 30 na uro, in vsak želi v domu prenočiti. Kolikšna je verjetnost, da bo ob 16h še kakšno ležišče prosto, če dom premore 100 ležišč? [3%]

12. Dež pada enakomerno po 10 mm na uro. Vse kapljice imajo enako prostornino po 0,03 cm^3. Lovimo jih v valjasto posodo s 3 cm^2 velikim dnom, katere višina je 2 cm. Kolikšna je verjetnost, da bo posodica prekipela prej kot v 115 minutah?

13. Zlato naparjujemo na majhne kontakte v integriranem vezju. Kontakt je pokrit, če se na njem nabere vsaj 100 atomov zlata. Tok ionov zlata Au$^+$, ki vpada na kontakt, meri $I = 2 \cdot 10^{-14}$ A. Kolikšna je verjetnost, da po 1 ms naparjevanja kontakt še ni pokrit? (Osnovni naboj je $e_0 = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ As). [0,0113]

14. V neki plinski zmesi je nekaj radioaktivnega argona in sicer toliko, da je 10^4 (10^6) aktivnih atomov na cm^3. Od zmesi zajameš 1 mm^3. Kolikšna je verjetnost, da je tu koncentracija aktivnega argona za več kot 10% večja kot povprečna koncentracija?

15. Izvir z aktivnostjo 100 razpadov na minuto postavimo za svinčeno ploščo z debelino, ki je enaka ravno dvema razpolovnima debelinama. Kolikšna je verjetnost, da v času pol minute zaznamo več kot 10 razpadov? [$\bar{N} = 12{,}5$, $P = \sum_{11}^{\infty}(\bar{N}^N/N!)\mathrm{e}^{-\bar{N}} \approx 0{,}5 + \Phi(0{,}565) = 0{,}712$]

16. Točkast izvir seva žarke γ enakomerno v vse smeri. Aktivnost izvira je 1000 s^{-1}. Aktivnost merimo na razdalji 1 m z detektorjem v obliki valja s polmerom $r = 2$ cm, tako da je izvir na osi valja. Detektor prešteje vse žarke, ki padejo na osnovno ploskev valja. Kolikšna je verjetnost, da bi na podlagi izmerjenega števila preštetih žarkov γ v eni minuti določili aktivnost izvira, ki bi bila polovica ali manj dejanske?

4.3 Osnove statistike

1. Pri metanju kocke smo dobili naslednje rezultate (14, 19, 17, 16, 20, 14) za izide (1, 2, 3, 4, 5, 6). Je kocka "pravična"?

2. Matematično šolsko nalogo pišemo v dveh razredih s po 36 učenci. V prvem je rezultat (odlični, prav dobri, dobri, zadostni, nezadostni): (4, 8, 7, 15, 2), v drugem pa (3, 11, 12, 6, 6). Je en razred boljši od drugega?

3. Pri neki anketi o popularnosti treh politikov so na vzorcu 100 odgovorov dobili rezultat (51%, 27%, 22%), čez tri mesece pa na enako velikem vzorcu (45%, 26%, 29%), za prvega, drugega in tretjega. Se je mnenje volivcev res spremenilo?

4. Nek učenec je moral pri praktičnih vajah izmeriti razpolovno debelino svinca. Pravi, da je meril pet krat, vsakič po deset minut, in izmeril 101, 100, 99, 101 in 99 razpadov. Lahko z 99% zanesljivostjo trdimo, da meritve ni opravil?

5. Pri merjenju toka skozi porabnik z nazivno vrednostjo 1 kΩ smo pri vrednostih 10 V, 20 V, 30 V in 40 V izmerili 5 mA, 10 mA, 25 mA in 40 mA. Pri prvih dveh meritvi toka je bila napaka 2 mA, pri drugih dveh 4 mA; napaka pri merjenju napetosti je zanemarljiva. Ali lahko trdimo, da podana vrednost upora napačna?

Priloge

Naslednji dve tabeli sta vzeti iz knjige: R. Jamnik, Verjetnostni račun in statistika, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1995

Tabela B

Vrednosti funkcije $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	0·0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3079	3106	3133
9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1·0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2·0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
3	4893	4895	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3·0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998	4998
5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
6	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	5000	5000

Tabela C

Rešitve χ_α^2 enačbe $P(\chi^2(n) > \chi_\alpha^2) = \alpha$

$n \backslash \alpha$	0·99	0·95	0·05	0·02	0·01	0·001
1	0·00	0·00	3·84	5·41	6·64	10·83
2	0·02	0·10	5·99	7·82	9·21	13·82
3	0·12	0·35	7·82	9·84	11·34	16·27
4	0·30	0·71	9·49	11·67	13·28	18·46
5	0·55	1·14	11·07	13·39	15·09	20·52
6	0·87	1·64	12·59	15·03	16·81	22·46
7	1·24	2·17	14·07	16·62	18·48	24·32
8	1·65	2·73	15·51	18·17	20·09	26·12
9	2·09	3·32	16·92	19·68	21·67	27·88
10	2·56	3·94	18·31	21·16	23·21	29·59
11	3·05	4·58	19·68	22·62	24·72	31·26
12	3·57	5·23	21·03	24·05	26·22	32·91
13	4·11	5·89	22·36	25·47	27·69	34·53
14	4·66	6·57	23·68	26·87	29·14	36·12
15	5·23	7·26	25·00	28·26	30·58	37·70
16	5·81	7·96	26·30	29·63	32·00	39·25
17	6·41	8·67	27·59	31·00	33·41	40·79
18	7·02	9·39	28·87	32·35	34·80	42·31
19	7·63	10·12	30·14	33·69	36·19	43·82
20	8·26	10·85	31·41	35·02	37·57	45·32
21	8·90	11·59	32·67	36·34	38·93	46·80
22	9·54	12·34	33·92	37·66	40·29	48·27
23	10·20	13·09	35·17	38·97	41·64	49·73
24	10·86	13·85	36·42	40·27	42·98	51·18
25	11·52	14·61	37·65	41·57	44·31	52·62
26	12·20	15·38	38·88	42·86	45·86	54·05
27	12·88	16·15	40·11	44·14	46·96	55·48
28	13·56	16·93	41·34	45·42	48·28	56·89
29	14·26	17·71	42·56	46·69	49·59	58·30
30	14·95	18·49	43·77	47·96	50·89	59·70

Pri $n > 30$ lahko vzamemo $\chi_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(z_\alpha + \sqrt{2n-1}\right)^2$. Pri tem je z_α rešitev enačbe $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ in Z porazdeljena standardizirano normalno.