Matematične metode v fiziki II – seminarji

šolsko leto 2013/14

Kazalo

Poglavje 1

Navadne diferencialne enačbe (NDE)

1.1 NDE 1.reda

1. Na zaporedno vezana kondenzator ($C = 100\ \mu$F in upornik ($R = 100$ kΩ) je priključena napetost 20 V. Počakamo, da se kondenzator napolni. V nekem trenutku v hipu obrnemo polariteto.

   a) Kolikšen tok steče skozi upornik tik po tem, ko smo obrnili polariteto vira?
   b) Kako se tok spreminja s časom?
   c) Skiciraj potek napetosti.
   d) Kdaj je napetost na kondenzatorju enaka 0?

2. V valjasti posodi s premerom 8 cm stoji voda 20 cm visoko. V dnu posode je okrogla luknjica s premerom 3 mm. V kolikšnem času izteče polovica vode? [$h(t) = h_0[1 - (r/R)^2 t\sqrt{g/2h_0}]^2$, $t_{1/2} = 41{,}5$ s.]

3. Na zaporedno vezana kondenzator s kapaciteto $C = 100\ \mu$F in upornik z $R = 10$ kΩ priključimo napetost, ki narašča kvadratično s časom, $U_g(t) = kt^2$, tako da v času 1 s naraste od 0 na 10 V. Kolikšen tok teče v vezju po 1 s? *Rešitev*: $\alpha = 2k/R$, $\beta = 1/RC$, $I(t) = \alpha\left(e^{-\beta t} + \beta t - 1\right)/\beta^2 = 0{,}74$ mA.

4. Posodo napolnimo s 3 kg tekočine s specifično toploto $c_p = 4200$ J/kgK in temperaturo 80 °C. Površina sten posode je 10 dm^2 in je obdana z 2 mm debelo plastjo izolacije s toplotno prevodnostjo 0,1 W/mK. Posodo postavimo v tekočo vodo, ki popolnoma obliva posodo.

   a) V kolikšen času pade temperatura tekočine v posodi na 50 °C, če poskrbimo, da se tekočina v posodi dobro meša in je temperaturo oblivajoče vode 20 °C?
   b) Kolikšna pa je temperatura po 30 min, če v tem času temperatura okoliške vode linearno pade od začetne vrednosti 20 °C do končne vrednosti 5 °C?

5. Na zaporedno vezana dušilko z induktivnostjo $L = 0{,}10$ H in upornik z $R = 100\ \Omega$ priključimo napetost, ki eksponentno pojema s časom kot $U = U_0 e^{-\alpha t}$, $U_0 = 24$ V, $\alpha = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$.

a) Približno skiciraj, kako se tok v vezju spreminja s časom. Posebno pazljivo nariši tok pri zelo majhnih časih in pri zelo velikih.

b) Zapiši časovno odvisnost toka v vezju, tako da rešiš diferencialno enačbo.

c) Ob katerem času je tok največji?

6. Na upornik iz cekasa s specifičnim uporom 1 Ωmm^2/m, gostoto 8 kg/dm^3, specifično toploto 400 J/kgK in radijem 1 mm priključimo izvir napetosti. Napetost pade v času $\Delta t = 10$ s linearno od začetne vrednost 100 V na 0. Žice je obdana z 0,1 mm debelo plastjo toplotne izolacije s toplotno prevodnostjo 0,1 W/mK. Kako se spreminja temperatura žice?

7. Ko napolnjen 25 litrski bojler izključimo, je voda segreta na 60 °C. Kolikšna je temperatura vode po treh urah, če je stalna poraba vode 5 litrov na uro? Površina bojlerja je 45 dm^2, debelina sten 1 cm, toplotna prevodnost izolacije 0,1 W/mK.

1.2 Homogena NDE 2. reda

1. Na zračni drči miruje voziček, ki je z vzmetjo s $k = 8$ N/m pritrjen ob eno krajišče drče. Na voziček sta pritrjena močna magneta, ki ustvarjata zaviralno silo $F_u = -Bv$, $B = 3$ kg/s. Kolikšna naj bo masa vozička, da bomo dosegli ravno kritično dušenje? Izračunaj odmik vozička od mirovne lege 0,3 s po tistem, ko smo ga

   a) odmaknili za 10 cm in spustili,

   b) odmaknili za 5 cm in sunili s hitrostjo 30 cm/s proti mirovni legi?

2. Kondenzator s kapaciteto $C = 1\ \mu$F je zaporedno vezan z upornikom z $R = 10\ \Omega$ in dušilko z $L = 0{,}1$ mH. Ob času $t = 0$ je napetost na uporniku 6 V in na dušilki -3 V. Kolikšen tok teče v vezju po 10 μs?

3. Kroglico iz jekla z gostoto 7,6 g/cm^3 in radijem 0,5 cm obesimo na vzmet s konstanto 0,04 N/m in potopimo v tekočino z viskoznostjo 0,1 kg/ms.

   a) Zapiši enačbo nihanja in določi koeficient dušenja (β) ter lastno frekvenco nihanja.

   b) Zapiši časovni potek nihanja, če ob $t = 0$ nihalo v mirovanju sunemo s hitrostjo 15 cm/s. *Rešitev*: $s(t) = B\mathrm{e}^{-\beta t} \sin \omega_0' t$, $\omega_0' = 2{,}93\ \mathrm{s}^{-1}$, $\beta = 1{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$, $B = 5{,}11$ cm

4. Na 2 m dolgi lahki in togi vrvici je obešena utež. Zgornje krajišče vrvice začnemo nenadoma premikati z enakomerno hitrostjo 0,5 m/s v vodoravni smeri. Za koliko se v 1 s premakne utež, če na začetku miruje. *Rešitev*: $s(t) = v_0(t - \sin \omega t/\omega) = 0{,}32$ m.

1.3 Nehomogena NDE 2. reda

1. Na zapredno vezana kondenzator s kapaciteto 1 μF in tuljavo z induktivnostjo 0,1 mH zaporedno vežemo upornik s tolikšnim uporom, da je krog ravno kritično dušen.

a) Kolikšen je R? [1/4]

b) Na vezje priključimo izmenično napetost $U(t) = U_0 \sin \omega t$ z $U_0 = 12$ V in ω, ki je ravno enaka lastni frekvenci nihanega kroga. Kolikšna je amplituda toka po dolgem času? [1/2]

c) Kako se spreminja tok v vezju, če je bil ob sklenitvi tokokroga kondenzator prazen?

2. Nabito kovinsko kroglico z maso 10 g in nabojem $+10^{-6}$ As obesimo na vzmet s konstanto 4 N/m in postavimo med dve vodoravni plošči kondenzatorja.

   a) Kako niha kroglica po tem, ko vključimo električno polje z jakostjo $E = 10^5$ V/m, če je na začetku mirovala? Smer polja kaže navzgor.

   b) Kako pa niha, če električno polje vključujemo počasi, tako da je bilo ob času 0 enako 0, nato pa vsako sekundo naraste za $= 10^5$ V/m? Nihalo je na začetku mirovalo. (Namig: preveri, da je $s = at + b$ možna (partikularna) rešitev enačbe in določi parametra a in b.)

3. Na kondenzator z nihalom pri prejšnji nalogi priključimo izmenično napetost, tako da električna poljska jakost niha kot $E(t) = E_0 \sin \omega t$ z $E_0 = 10^5$ V/m in $\omega = 25\ \mathrm{s}^{-1}$.

   a) Kolikšna je amplituda nihanja po dovolj dolgem času, če predpostavimo zelo majhno, a vendarle končno dušenje?

   b) Kolikšen je odmik nihala po 0,2 s, če je kroglica na začetku mirovala?

4. V roki držimo vzmet s koeficientom 100 N/m. Na drugem krajišču je obešena utež z maso 1 kg. Prvo krajišče pričnemo periodično pozibavati v navpični smeri. Gibanje roke opišemo kot $s_0 \sin \omega t$ s (krožno) frekvenco ω, ki je enaka 9/10 lastne (krožne) frekvence nihala, in $s_0 = 3$ cm. (Na vprašanje c) lahko odgovoriš brez poznavanja odgovora pri b).)

   a) a) Zapiši enačbo za gibanje uteži, če ni upora. (Namig: prosta nihala) [$s'' + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s_0 \sin \omega t$]

   b) b) Izračunaj časovni potek nihanja uteži. [$s = 100 s_0 (\sin \omega t - 0{,}9 \sin \omega_0 t)/19$]

   c) c) Kolikšno amplitudo doseže utež po zelo dolgem času, če predpostavimo zelo majhno, a vendarle končno dušenje? [15,7 cm]

5. *Kako pojema amplituda nihanja, npr. pri nihalu na vijačno vzmet, če je dušenje šibko in če velja kvadratni zakon upora? (Izračunaj, za koliko se zmanjša energija nihala ob vsakem nihaju, tako da upoštevaš, da se nihanje le malo loči od sinusnega.)

1.4 Sistemi NDE 2. reda (sklopljena nihala)

1. Na telo z maso $m_1 = 3m$, ki visi na vzmeti s konstanto k, obesimo preko enake vzmeti drugo telo z maso $m_2 = 2m$ ($k = 24$ N/m, $m = 1$ kg). Kako se s časom spreminjata odmika teles, če na začetku prvo telo (in s tem tudi drugo) potegnemo navzdol za 5 cm, hkrati pa drugo telo še sunemo s hitrostjo 20 cm/s v smeri proti mirovni legi. (Naj bo os x usmerjena navzdol.)

2. Določi lastna nihanja sistema dveh teles z masama po 2 kg na zračni drči, ki sta med seboj povezani z vzmetjo s konstanto 7 N/m, z vzmetema s konstantama po 18 N/m pa vsako na svoje krajišče drče. Kako nihata nihali, če na začetku levo nihalo izmaknemo iz mirovne lege za 20 cm v levo, drugo nihalo pa sunemo v desno, tako da ima na začetku hitrost 1,2 m/s.

3. Na zračni drči mirujeta telesi z masama $m_1 = 0{,}5$ kg in $m_2 = 2m_1 = 1$ kg, povezani z vzmetjo s $k = 3$ N/m.
   a) Določi lastne načine nihanja sistema.
   b) Ob času $t = 0$ telesi poženemo drugo proti drugemu, vsakega z (velikostjo) hitrosti 18 cm/s. Kako se gibljeta telesi po tem?
   c) Ali telesi lahko trčita, če je dolžina neobremenjene vzmeti 15 cm?

4. Na vodoravno zračno drčo postavimo tri vozičke. Srednjega z maso 200 g povežemo z enakima vzmetema s koeficientom 20 N/m s krajnima vozičkoma z masama po 300 g. Določi lastna nihanja sistema (lastne frekvence in razmerja amplitud). Razišči in komentiraj še limito, ko gre masa srednjega vozička proti 0, in limito, ko gre njegova masa preko vse meje.

5. Na zračni klopi lebdita telesi z masama po 200 g, ki sta povezani z vzmetjo s $k = 1$ N/m. Sistem miruje na začetku zračne klopi, tako da se prva utež dotika stene. Drugo utež potisnemo proti steni za 5 cm in sistem spustimo. Kako se telesi gibljeta? (Razmisli, v katerem trenutku smemo zapisati začetni pogoj.) Problem reši še za primer, ko sta masi različni.

Poglavje 2

Fourierova analiza

2.1 Fourierova analiza

1. Skozi računalniško vezje potuje periodičen signal s periodo $T = 1$ s in amplitudo napetosti $U_0 = 5$ V, ki ima v eni periodi obliko:

$$U(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T} t\,, & 0 < t < T/2 \\ 0\,, & T/2 < t < T \end{cases}$$

   a) Zapiši člene Fourierove vrste do vključno tretjega večkratnika osnovne frekvence. Katere frekvence nastopajo v spektru?
   b) Kolikšna je skupna moč, ki se troši na uporu 100 Ω?
   c) Nariši spekter moči na uporu 100 Ω do vključno tretjega večkratnika osnovne frekvence.

   Poznamo:

$$\int x \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}\,, \qquad \int x \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}\,.$$

2. Skozi računalniško vezje potuje periodičen signal s periodo $T = 1\mu$ s, ki ima v eni periodi obliko:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 = 5\text{ V}\,, & 0 < t < T/4 \\ 0\,, & T/4 < t < T \end{cases}$$

   a) Katere frekvence nastopajo v spektru?
   b) Zapiši prvih nekaj členov v Fourierovi vrsti.
   c) Skiciraj spekter moči.

3. Analiziraj spekter enega nihaja:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 \sin \omega t, & 0 < t < t_0, \quad t_0 = 2\pi/\omega \\ 0\,, & t_0 < t < T, \end{cases}$$

   če za dolžino intervala vzameš $T = t_0$ (trivialno), $T = 2t_0$, $T = 10t_0$.

4. Skozi upornik R polnimo kondenzator C in ga praznimo skozi tlivko. Izpraznitev je trenutna; pri tem pade napetost od vžigne napetosti U_2 do ugasne napetosti U_1. Ko tlivka ne gori, pa napetost spet naraste do U_2. Kakšen je spekter tako dobljenega prevesnega nihanja?

5. *Izračunaj in nariši spekter sinusnega nihanja, ki se začne v trenutku, ko je odmik enak nič in konča po pol nihaja.

6. *Izračunaj spekter za signal v obliki Gaussove funkcije:

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2}\,.$$

(Poznamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,.$$

Namig: uporabi substitucijo $x = t/\sigma - \mathrm{i}\sigma\omega/2$.)

Poglavje 3

Vektorski račun in parcialne diferencialne enačbe

3.1 Gradient, divergenca, rotor

1. Izračunaj električno poljsko jakost na simetrali dveh točkastih nabojev z nabojema po $+e$ v razdalji l na dva načina: (a) z direktnim računom poljske jakosti in (b) kot gradient potenciala.

2. Zapiši električni potencial kolobarja z radijema r_1 in r_2, $r_1 > r_2$, na katerem je enakomerno razmazan naboj s ploskovno gostoto σ v geometrijski osi kot funkcijo oddaljenosti od središča, z. Izračunaj električno poljsko jakost na osi kot gradient potenciala.

3. *Na sredi daljice z dolžino $2l$ sedi naboj $-2e$, na krajeh pa naboja $+e$, tako da je celotni naboj 0. Kakšno je polje v veliki oddaljenosti? Računaj, kot da je l zelo majhen, e pa velik, tako da je kvadrupolni moment $q = 2el^2$ končen. Nariši silnice.

Divergenca in rotacija

4. V elektronki z valjasto elektrodo je potencial takole odvisen od razdalje r od osi valja:

$$U(r) = A\, r^{1/3}\,, \qquad A = 10^3\ \mathrm{Vm}^{-1/3}\,, \qquad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

   a) Izračunaj električno poljsko jakost $\vec{E}(\vec{r})$.
   b) Izračunaj gostoto izvirov $\rho(r)$.
   c) Pokaži, da je električno polje brezvrtinčno.
   d) Kolikšen naboj je znotraj plašča $r_1 < r < r_2$, $r_1 = 1$ cm, $r_1 = 2$ cm, če je dolžina elektrode 25 cm?

5. Magnetno polje znotraj vodnika z radijem $R = 1$ cm ima komponente

$$H_x = -A\,\frac{ry}{R^2}\,, \qquad H_y = A\,\frac{rx}{R^2}\,, \qquad H_z = 0\,,$$

   če je $A = 10^4$ A/m in je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ razdalja od osi vodnika.

a) Izračunaj, kako se z radijem r spreminja gostota toka v vodniku.
b) b) Kolikšen je celotni tok, ki teče v vodniku?
c) c) Zapiši komponente magnetnega polja zunaj vodnika.

(Vprašanji pri b) in c) lahko odgovoriš brez poznavanja odgovora na vprašanje pod a).)

6. Vektorski potencial magnetnega polja okoli dolge ravne žice, po kateri teče tok I, zapišemo kot
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \vec{e}_I\,,$$
pri čemer je r razdalja od žice, r_0 poljubna konstanta in $\vec{e}_I$ enotni vektor v smeri toka. Pokaži, da rotacija polja vodi do znanega rezultata za gostoto magnetnega polja dolge ravne žice.

7. Konstantnemu magnetnemu polju $\vec{B} = (2B_0, B_0, 0)$ priredimo vektorsko polje (vektorski potencial) $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

   a) Pokaži, da je polje $\vec{A}$ brez izvirov.
   b) Pokaži, da velja $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$.
   c) Namesto $\vec{B}$ sedaj vzmemo vektorsko polje, ki se linearno povečuje vzdolž osi z: $\vec{C} = (0, 0, kz)$. Izračunaj $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$, $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{C} \times \vec{r})$.
   d) Preveri, ali je $\vec{B}$, izračunan pri c), brez izvirov.

8. Zapiši hitrostno polje pri viskoznem pretakanju tekočine v valjasti cevi in izračunaj njegovo divergenco in rotacijo.

3.2 PDE

1. Gostota električnega naboja znotraj krogle z radijem 10 cm pada linearno z oddaljenostjo od središča in sicer od vrednosti 1 As/m^3 v središču na vrednost 0 na površju krogle. Določi električno polje (potencial in jakost) znotraj in zunaj krogle.

2. Gorilni element, v katerem so enakomerno porazdeljeni radioaktivni izviri z gostoto moči 100 kW/m^3 ima obliko dolgega valja s polmerom 5 cm. Toplotna prevodnost snovi je 1 W/mK.

   a) Kolikšna je temperatura na sredini, če je temperatura plašča 600 K?
   b) Kolikšna pa je temperatura na sredini, če gorilni element obdamo s 3 cm debelo plastjo s toplotno prevodnostjo 0,5 W/mK. Pri tem ostane temperatura zunanjega plašča izolacije enaka kot prej tj. 600 K.

3. Da človeka ne bi zeblo, se zvije v klobčič, ki ga aproksimiramo s kroglo s polmerom 27 cm, napolnjeno z vodom. Človek oddaja 100 W, temperatura v notranjosti (pri $r = 0$) je 37 °C, toplotna prevodnost vode je $\lambda = 0{,}6$ W/mK.

a) Kolikšna mora biti v tem primeru temperatura kože, da bo človek oddal vso toploto v okolico? Predpostavimo, da toplotni tok teče le v radialni smeri.

b) Kolikšna naj bo debelina ogrinjala iz snovi s toplotno prevodnostjo $\lambda = 0{,}2$ W/mK, da človeka v tem primeru ne bo zeblo pri temperaturi -40 °C. Ogrinjalo aproksimiramo z votlo krogelno lupino z notranjim radijem 27 cm.

4. Po 10 m dolgi železni cevi z notranjim premerom 5 cm in 3 mm debelo steno teče vrela voda. Cev je obdana s 3 cm debelo plastjo azbestne volne, ki ima toplotno prevodnost 0,1 W/mK. Kolikšen toplotni tok uhaja iz cevi, če je zunaj temperatura 10 °C? (776 W)

5. V krogelni lupini z notranjim radije $r_1 = 10$ cm in zunanjim radijem $r_2 = 20$ cm je enakomerno razmazan naboj z gostoto 10^{-6} As/m^3. ($\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.)

   a) Kolikšna je napetost med notranjim in zunanjim plaščem lupine?

   b) Kolikšen je potencial v središču krogle, če je v neskončnosti ($r \to \infty$) enak 0?

6. V bakrenem vodniku z radijem 1 mm teče visokofrekvenčni tok 1000 A. Porazdelitev po preseku ni konstantna temveč se gostota toka *linearno* spreminja z razdaljo od osi vodnika. Zunanji plašč vodnika držimo pri stalni temperaturi. Kolikšna je temperaturna razlika med osjo vodnika in njegovim plaščem? Specifični upor bakra je 0,017 Ωmm^2/m, toplotna prevodnost 380 W/mK.

7. V votli krogli z notranjim radijem $r_1 = 5$ cm in zunanjim radijem $r_2 = 10$ cm, iz snovi s toplotno prevodnostjo $\lambda_1 = 2$ W/mK, so med notranjim in zunanjim radijem enakomerno porazdeljeni radioaktivni izviri z gostoto moči $q = 3 \cdot 10^3$ W/m^3. Notranja stena pri r_1 je toplotno izolirana, zunanjost pa hladimo z mrzlo vodo, tako da je temperatura zunanjega plašča 0 °C.

   a) Kolikšna je najvišja temperatura v krogli?

   b) Kolikšen toplotni tok teče v mrzlo vodo?

8. Na vsak m^2 razsežne plošče z debelino 10 cm pravokotno pada svetlobni tok z močjo 1 kW. Absorpcijski koeficient snovi je $\mu = 10$ m^{-1}, toplotna prevodnost pa 10 W/mK. Izračunaj temperaturni profil v plošči, če je spodnja stranica toplotno izolirana, zgornja pa ima konstantno temperaturo 20 °C. (V plasti z debelino dx se absorbira toplotni tok $dP = \mu P(x) dx$, svetlobni tok pa takole pojema z razdaljo $P(x) = P_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mu x}$.) *Rešitev*: $T(x) = T_0 + (j_0/\lambda\mu)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu x} - \mu x \mathrm{e} - \mu a\right).$

3.3 Maxwellove enačbe, valovna enačba

1. Zapiši izraz za stoječe valovanje (npr. zvočno v cevi) in pokaži, da je rešitev valovne enačbe. Poišči zvezo med amplitudo hitrosti in amplitudo tlačne razlike. Določi še amplitudo odmika in gostote, in zapiši, kako se s krajem in časom spreminjajo hitrost valovanja, odmik delcev, tlačna razlika in gostota plina.

2. Pokaži, da lahko valovanje, ki se koncentrično širi iz točkastega zvočila, zapišemo kot $u(r,t) = f(t - r/c)/r$, za poljubno (gladko) funkcijo f.

3. Zapiši rešitev za zvočno valovanje z določeno frekvenco, ki se širi iz točkastega zvočila, in sicer za tlak $\delta p\,(r,t)$ in za radialno hitrost $v_r(r,t)$. Izračunaj amplitudo hitrosti iz amplitude tlačne razlike δp_0 za $r \gg \lambda$. Zapiši še formulo za odmik $u_r(r,t)$.

   (Uporabi enačbo $\rho\,\partial v_r(r,t)/\partial t = -\mathrm{grad}\,\delta p\,(r,t)$).

Poglavje 4

Verjetnostni račun in osnove statistike

4.1 Porazdelitve

1. Z igralno kocko nariši porazdelitev izidov pri vsaj 120 poskusih. Izračunaj $\bar{x}$, $\bar{x^2}$, σ, in jih primerjaj s teoretičnimi vrednostmi.

2. Določi porazdelitev *vsote* izidov treh (šestih) zaporednih metov pravilne kocke pri vsaj 120 metih. Določi povprečno vrednost delnih vsot in njihov σ. Porazdelitev nariši in jo primerjaj z Gaussovo porazdelitvijo, ki ima enako povprečno vrednost in σ ter preveri ujemanje pri nekaterih značilnih vrednostih.

3. V nekem razredu dosežejo 4 učenci oceno 1, 7 oceno 2, 10 oceno 3, 6 oceno 4 in 3 oceno 5.

   a) Nariši normalizirano porazdelitev.

   b) Izračunaj povprečno vrednost porazdelitve.

   c) Izračunaj standardno deviacijo (σ).

   d) Na isti sliki nariši še Gaussovo porazdelitev

   $$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] ,$$

   ki ima enak $\bar{x}$ in σ.

4. Vzemimo, da pri neki nevihti porazdelitev strel po toku, ki steče skozi strelo, podaja enačba $dp/dI = A(I/I_0)\,\mathrm{e}^{-I/I_0}$, kjer je $I_0 = 30$ kA.

   a) Določi normalizacijsko konstanto A.

   b) Nariši graf porazdelitve strel po toku, ki steče skoznje. Na grafu označi karakteristične točke.

   c) Kolikšen tok povprečno steče skozi strelo?

   d) Zapiši porazdelitev strel po oddani moči ($P = I^2/R$). Dobljeno porazdelitev izrazi kot funkcijo moči.

Koristni formuli: $\int x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1)$, $\qquad \int x^2\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3})$

4. Porazdelitev delcev po kinetični energiji lahko zapišemo kot $\mathrm{d}p/\mathrm{d}E = AE^{1/2}$ za $E \leq E_0$ in $\mathrm{d}p/\mathrm{d}E = 0$ za $E > E_0$.

   a) Določi normalizacijsko konstanto A.
   b) Izračunaj povprečno vrednost energije $\overline{E}$.
   c) Zapiši porazdelitev delcev po hitrosti, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}v$. ($E = \frac{1}{2}mv^2$)
   d) Izračunaj povprečno vrednost hitrosti $\overline{v}$.

   Rezultate pri a) in b) izrazi z E_0, pri c) z v, E_0 in m ter pri d) z E_0 in m.

6. Verjetnost, da se elektron nahaja na razdalji r od jedra, zapišemo z gostoto porazdelitve

$$w(r) = A\,r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,, \qquad 0 < r < \infty\,,$$

   pri čemer je $a = 0{,}05$ nm. Določi normalizacijsko konstanto A, povprečno vrednost r, σ in povprečno vrednost $1/r$.

7. Zelo majhne, popolnoma prožne gladke kroglice padajo navpično na vodoravno ležečo togo kroglo in se odbijajo. Točke, kjer si mislimo, da bi kroglice (če se ne bi odbile) prebodle prečni presek krogle, so po tem preseku enakomerno porazdeljene. Kakšna je smerna porazdelitev kroglic tako po odboju?

8. Zelo majhne, popolnoma prožne gladke kroglice padajo na vodoravno ležeč, navzgor odprt žleb in se odbijajo od notranje ploskve žleba. Prečni presek žleba je polkrog z radijem $R = 10$ cm. Točke, kjer si mislimo, da bi tir padajočih kroglic pred odbojem prebodel vodoravno ravnino, so v tej ravnini enakomerno porazdeljene.

   a) Kakšna je porazdelitev kroglic po uklonskem kotu tako po odboju? Preveri, da je porazdelitev normirana.
   b) Kolikšna je povprečna vrednost sinusa uklonskega kota ($\sin\vartheta$)?

4.2 Binomska in Poissonova porazdelitev

1. Sneg na strehi se tali in nastala voda se steka v žleb. Ker se sneg tali zelo počasi in ker na žleb ni priključena navpična cev, voda z višine kaplja na cesto. V treh urah se nateče 300 cm^3 vode, volumen ene kapljice pa je enak 0,03 cm^3.

   a) Pod kap se za 5 s postavi človek. Kolikšna je verjetnost, da bo nanj padla kvečjemu ena kapljica?
   b) Pod kap postavimo 0,3 decilitrski kozarček. Kolikšna je verjetnost, da po 20 minutah voda še ne bo stekla čez rob kozarčka?

2. Pri metanju nepravilne kocke je padla enica 4 krat, dvojka 8 krat, trojka 4 krat, štirica 8 krat, petica 4 krat in šestica 12 krat.

a) Nariši normalizirano porazdelitev in izračunaj povprečno vrednost porazdelitve ter standardno deviacijo (σ).

b) Na podlagi poskusa izračunaj verjetnost, da bo pri štirih metih s to kocko vsaj tri krat padla šestica.

c) Kolikšna je pa verjetnost, da bo pri 100 metih šestica padla vsaj 40 krat?

3. Na tehtnico sipamo frnikule z maso 0,75 g v povprečju 60 na minuto.

   a) Kolikšna je verjetnost, da v 1 s pade *natanko* ena frnikula?

   b) Kolikšna je verjetnost, da v 2 s padeta *vsaj* dve frnikuli?

   c) Kolikšna je verjetnost, da bo tehtnica pokazala maso 100 g prej kot v dveh minutah?

4. Na šahovsko desko (64 polj) vržemo 1000 pšeničnih zrn enakomerno po vsej površini. a) Kolikšna je verjetnost, da ostane izbrano polje nepokrito? b) Kolikšna pa je verjetnost, da je na izbranem polju več kot 12 zrn?

5. Neki števec registrira povprečno po 10 kozmičnih žarkov na minuto. Kolikšna je verjetnost, da v teku pol minute ne registrira nobenega žarka, ali samo enega, dva, . . . ali deset? Kolikšna pa je verjetnost, da registrira števec v času 1 ure več kot 650 sunkov?

6. 30 študentov se odpravi na 14 dnevni zaključni izlet. Kolikšna je verjetnost, da v tem času vsaj štirje praznujejo rojstni dan?

7. Razpolovna debelina snovi, ki absorbira nevtrone, je 1 cm. Kolikšna je verjetnost, da se v plasti z debelino 0.5 cm od štirih nevtronov ne absorbira nobeden? Kolikšna pa je verjetnost, da se jih od 80 nevtronov v tej plasti absorbira 20 ali manj?

8. V Sloveniji se v zadnjem času rodi povprečno 17500 otrok na leto. a) Kolikšna je verjetnost, da se v prvi uri novega leta ne rodi noben otrok? b) Kolikšna pa je verjetnost, da se na novega leta dan rodi več kot 60 otrok? V letu je 365 dni. Verjetnost za rojstvo otroka je vsak trenutek enaka.

9. 20 študentov piše naloge, ki se ocenjujejo z ocenami 0, 1/4, 1/2, 3/4 in 1. Ocene 1/2 ali več veljajo za pozitivne. Kolikšna je verjetnost, da bo pri neki nalogi neuspešen samo en študent, pri čemer so vse ocene enako verjetne?

10. Suh zrak je mešanica 79 % molekul dušika, 20 % molekul kisika in 1 % molekul ogljikovega dioksida. a) Kolikšna je verjetnost, da v vzorcu 500 molekul zraka ni nobene molekule ogljikovega dioksida? b) Kolikšna pa je verjetnost, da število molekul ogljikovega dioksida v vzorcu 5000 molekul za več kot 20 % presega povprečno vrednost?

11. Pri merjenju aktivnosti (številu razpadov v sekundi) nekega radioaktivnega izotopa namerimo v pol ure 121 razpadov. a) Kolikšna je verjetnost, da dobimo v naslednji minuti vsaj en razpad? b) Kolikšna je verjetnost, da v naslednje pol ure dobimo manj kot 100 razpadov. (Tu lahko predpostaviš, da se povprečna aktivnost s časom ne spreminja.)

12. Branjevka prinese na trg 24 glav solate. V povprečju proda v 6 urah 18 glav. Kolikšna je verjetnost, da bo prodala vso solato, če ostane uro dlje (tj. 7 ur)? (Namesto z glavami solate je morebiti lažje računati s potencialnimi kupci.)

13. V središču krogle, ki nevtrone samo absorbira, je točkast izvor nevtronov, ki izseva v odmerjenem času 1000 nevtronov. Radij krogle je $2l_{1/2}$. Kolikšna je verjetnost, da pride ven več kot 270 nevtronov?

4.3 Osnove statistike

1. Pri merjenju radioaktivnega razpada naredimo 50 meritev, pri vsaki meritvi merimo 10 s. Zabeležimo kolikokrat v 10 s ni prišlo do nobenega razpada, kolikokrat se je dogodil en sam razpad, kolikokrat dva, ... Rezultate kaže tabela:

število razpadov (N)	0	1	2	3	4	5 ali več
število dogodkov	4	17	11	13	3	2

   Na podlagi rezultatov za $0 \leq N \leq 4$ preveri, če število dogodkov uboga Poissonovo porazdelitev z $\bar{N} = 2$.

2. Nihajni čas matematičnega nihala smo merili pri treh poskusih. Pri prvem poskusu smo dobili 1,01 s $\pm$ 0,02 s, pri drugem poskusu 1,07 s $\pm$ 0,02 s in pri tretjem 1,10 s $\pm$ 0,02 s. Poskusi so bili napravljeni pri različnih temperaturah 8°C, 20°C in 24°C. S testom χ^2 ugotovi, kako je s smiselnostjo predpostavke, da temperatura pri poskusu ne vpliva na nihajni čas.

3. Lahko na podlagi rezultatov pri 2. nalogi zgoraj trdimo, da je nadarjenost porazdeljena "po Gaussu"?

4. Pri meritvi razpadnega časa nekega izotopa dobimo v zaporednih meritvah, ki jih opravimo vsako uro, naslednje število sunkov: 102, 88, 72, 78, 61, 62. Določi razpadni čas in začetno število sunkov (iz grafa $\ln N = -t/\tau + \ln N_0$) in oceni, če so rezultati v skladu s predpostavko o eksponentnem razpadu.