1 Kinematika

1.1 Premo gibanje

Merjenje hitrosti. Merimo lego telesa x kot funkcijo časa t. *Hitrost* telesa je definirana kot odvod lege po času

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1}$$

Ker merimo lege le ob določenih časih, $t_i, i = 1, N$, lahko računamo le *povprečno* vrednost hitrosti v časovnem intervalu $[t_{i+1}, t_i]$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \,, \tag{2}$$

pri čemer je x_i izmerjena lega ob času t_i, x_{i+1} pa ob t_{i+1}. Hitrost običajno pripišemu času na sredini intervala $\frac{1}{2}(t_{i+1} + t_i)$. Pogosto je bolj praktično, da vzamemo večji časovni interval, $[t_{i+1}, t_{i-1}]$, in formulo (2) zapišemo kot

$$v(t_i) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \,. \tag{3}$$

V tem primeru smo povprečno hitrost pripisali kar času t_i, ki leži znotraj intervala $[t_{i+1}, t_{i-1}]$.

V limiti, ko gredo časovni intervali $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$ proti nič, povprečna hitrost sovpade s trenutno. To bi pomenilo, da bo meritev tem bolj natančna, čim krajše časovne intervale izberemo. A v praksi to ni vedno najbolje. Če časovne intervale skrajšujemo, se lahko postane pot, ki jo telo opravi v intervalu, primerljiva ali celo manjša od natančnosti, s katero merimo odmik (recimo 1 mm). V tem primeru bo relativna napaka pri računanju hitrosti zelo velika in meritev hitrosti zelo nezanesljiva. Časovne intervale moramo torej izbrati tako, da bo pot, ki jo telo naredi v časovnem intervalu, dovolj velika v primerjavi z napako merjenja razdalje.

Merjenje pospeška. Pospešek je definiran kot

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4}$$

Postopek za določitev pospeška je podoben postopku pri računanju hitrosti, opisanemu v prejšnjem razdelku. Velja

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i} \,, \tag{5}$$

ali

$$a(t_i) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}\,. \tag{6}$$

Postopek, pri katerem računamo hitrosti po formuli (3) in pospešek po formuli (6), je bolj praktičen, saj časi, v katerih računamo hitrosti in pospeške, sovpadajo s časi, v katerih smo merili lege telesa.

V primeru, ko so časovni intervali med seboj enaki, $\Delta t = t_{i+1} - t_i =$ konst, lahko izpeljemo enostavno zvezo med pospeški in legami:

$$a(t_i) = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{(\Delta t)^2}\,. \tag{7}$$

Merjenje koeficienta dušenja. Jahač na zračni drči zavira magnetna sila, ki je premo sorazmerna s hitrostjo. Zato se jahač giblje pojemajoče s pojemkom, ki je prav tako premo sorazmeren s hitrostjo: $a = -\beta v$. Enačbo za gibanje zapišemo v obliki

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a = -\beta\, v \qquad \text{ali} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\beta\, \mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Enačbo integriramo, na levi od začetne hitrosti v_0 do končne hitrosti ob času t, na desni pa od začetnega časa 0 do časa t:

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\beta \int_0^t \mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Integral na levi je $\ln v$ na desni kar t. Ko vstavimo meje, dobimo

$$\ln v(t) - \ln v_0 = -\beta\, t \qquad \text{ali} \qquad \ln \frac{v(t)}{v_0} = -\beta\, t\,. \tag{10}$$

Enačbo antilogaritmiramo in dobimo

$$v(t) = v_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}\,. \tag{11}$$

Pot, ki jo telo opravi v času t, dobimo z integriranjem hitrosti (11):

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{v_0}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right)\,. \tag{12}$$

Koeficient dušenja β lahko določimo na dva načina:

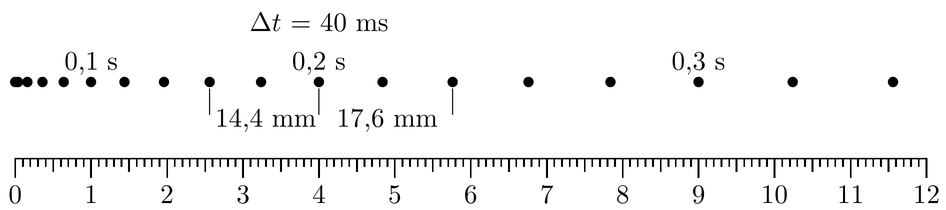
i) Iz prve enačbe (9) sledi $\beta = -a/v$. Če torej v tabeli izračunamo vrednosti hitrosti in pospeškov, dobimo β kot povprečno vrednost razmerja $-a(t_i)/v(t_i)$.

ii) V prvi enačbi v (10) vpeljemo novo spremenljivko $y = \ln v(t)$. Enačba ima potem obliko $y = \ln v_0 - \beta t$. Prepoznamo enačbo premice z naklonom $-\beta$. Narišemo torej graf, na katerem na vodoravno os čase t_i, na navpično os pa vrednosti $\ln v(t_i)$. Skozi točke potegnemo premico in iz naklona odčitamo β.

1.2 Eksperimentalne metode – premo gibanje

Lego v odvisnosti od časa lahko merimo na več načinov:

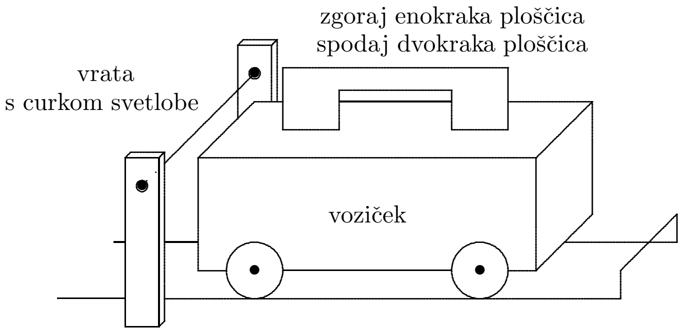
Brnač. Na telo pripnemo papirni trak in ga potegnemo skozi brnač. Brnač udarja v enakomernih časovnih intervalih Δt na trak skozi indigo papir in na traku pušča sledi. Časovni interval je pri različnih brnačih različen in meri 0,02 s, 0,025 s ali 0,1 s. V tem primeru se formule, ki smo jih zapisali v prejšnjem poglavju, poenostavijo v toliko, da ni potrebno računati časovih razlik za vsak interval posebej; vzamemo kar Δt v (2) in (5) ali $2\Delta t$ v (3) in (6). Ker v formulah (2) in (3) potrebujemo le *razlike* leg telesa, lahko direktno odčitavamo le razdalje med pikami na traku, ne pa razdalje od začetka traku do izbrane pike.



Slika 1: Primer analize traku: pike so v razmiku 20 ms, iz odčitane razdalje (14,4 mm), ki ustreza dvojnemu časovnemu intervalu $\Delta t = 40$ ms, izračunano hitrost $v = 14{,}4$ mm/40 ms $= 0{,}36$ m/s pripišemo času 0,18 s, tisto, ki ustreza razdalji 17,6 mm pa času 0,22 ms.

Ultrazvočni slednik. Slednik odda kratek ultrazvočni signal, ki se odbije od telesa in vrne do slednika. Iz časa potovanja signala in iz znane hitrosti zvoka v zraku naprava izračuna razdaljo do telesa. Slednik je povezan z računalnikom, ki zabeleži čas, ob katerem je oddal signal, in izmerjeno razdaljo. Postopek ponavlja v *enakomernih* časovnih intervalih in izmerke shranjuje v računalniku v obliki tabele. Dolžino časovnega intervala (frekvenco oddajanja signalov) lahko nastavljamo. Računalnik prikaže odvisnost lege od časa tudi grafično.

Svetlobna vrata. Na vozičku je nameščena ploščica, ki prekine curek svetlobe v svetlobnih vratih (Slika 2). Vrata so povezana z računalnikom, ki zabeleži čas prekinitve (t_1). Ko ploščica pride iz svetlobnih vrat, računalnik ponovno zabeleži čas (t_2). Iz razlike časov in znane dolžine ploščice (d), računalnik lahko določi (povprečno) hitrost vozička $\bar{v} = d/(t_2 - t_1)$. Dolžino ploščice moramo vpisati v računalnik.



Slika 2: Svetlobna vrata

Če želimo izmeriti več leg in časovnih intervalov, vzamemo namesto ploščice letev, na kateri so enakomerno razporejene izmenoma prozorne in neprozorne proge. Računalnik beleži čase, ko se curek prekine in ko se zopet pojavi. V tem primeru časovni intervali *niso konstantni*, pač pa so konstantne poti, ki jih telo opravi v teh intervalih, saj ustrezajo kar širinam svetlih oz. temnih prog.

Elektronska štoparica. Pospešek pri enakomerno pospešenem gibanju (prostem padu) merimo z elektronsko štoparico. Jekleno kroglico na začetku drži elektromagnet. Ko tok skozi elektromagnet prekinemo, začne kroglica padati, hkrati pa signal sproži začetek merjenja časa v elektronski štoparici (ki je lahko kar računalnik). Kroglica pade v čašo, kar ponovno sproži signal in ustavi merjenje časa. Pospešek (težni) dobimo iz enačbe za pot pri enakomerno pospešenem gibanju $h = \frac{1}{2}at^2$ (ob privzetku, da je bila hitrost na začetku enaka 0).

Merimo pri dveh različnih višinah, $h_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ in $h_2 = \frac{1}{2}at_2^2$. Enačbi odštejemo in dobimo

$$h_1 - h_2 = \tfrac{1}{2}a(t_1^2 - t_2^2) \qquad \text{ali} \qquad a = \frac{2(h_1 - h_2)}{t_1^2 - t_2^2}\,. \tag{13}$$

Prednost metode je v tem, da nam ni potrebno poznati točne višine, ki jo kroglica prepotuje, temveč le *razliko višin*. Zadostuje, da izmerimo le premik višine prožilnega mehanizma, kar lahko določimo veliko bolj natančno kot samo višino.

1.3 Vrtenje

Pri vrtenju telesa se namesto lege telesa pojavi kót zasuka φ, namesto hitrosti in pospeška pa kotna hitrost ω in kotni pospešek α. Kot merimo v *radianih*, ki nimajo dimenzije, zato enote ne pišemo. Polni kot v radianih meri 2π, pretvornik med kotom v stopinjah in kotom v radianih je $\varphi(\text{v radianih}) = (\pi/180)\,\varphi(\text{v stopinjah})$. Velja

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{in} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,, \tag{14}$$

Če izmerimo zaporedje kotov $\varphi_i, i = 1, N$ ob časih $t_i, i = 1, N$, izračunamo kotno hitrost kot

$$\omega(t_i) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \tag{15}$$

in

$$\alpha(t_i) = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}\,. \tag{16}$$

Kote zasuka in pripadajoče čase merimo s svetlobni vrati, tako da letev nadomestimo s krožno ploščo, na kateri se enakomerno po $15°$ menjavajo prozorni in neprozorni krožni izseki ($\Delta\varphi = 15°$).

1.4 Gibanje v ravnini: poševni met

Gibanje v ravnini razstavimo v gibanje v vodoravni in gibanje v navpični smeri. Če zanemarimo upor zraka, na telo deluje le gravitacijska sila v navpični smeri. V vodoravni smeri je zato gibanje premo enakomerno s konstantno hitrostjo, ki je kar enaka komponenti začetne hitrosti v_0 v tej smeri:

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\vartheta\,, \qquad x(t) = x_0 + v_0 \cos\vartheta\; t\,, \tag{17}$$

pri tem je ϑ *dvižni kot*. V navpični smeri je gibanje enakomerno pospešeno s pospeškom $a = -g$, če kaže os y navzgor, oz. $a = g$, če kaže os y navzdol. Velja

$$v_y(t) = v_{0y} + at = v_0 \sin\vartheta + at\,, \qquad y(t) = y_0 + v_0 \sin\vartheta\; t + \tfrac{1}{2}at^2\,. \tag{18}$$

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v začetno točko, potem velja $x_0 = y_0 = 0$. Iz enačbe za lego x v (17) izrazimo čas, $t = x/v_0 \cos\vartheta$, in vstavimo v enačbo z a y v (18). Dobimo enačbo *parabole*:

$$y = x \tan\vartheta + \frac{a}{2v_0^2 \cos\vartheta^2}\, x^2\,. \tag{19}$$

Čas leta in domet. Najprej izračunajmo čas t_m, ki ga telo potrebuje, da doseže največjo višino. Tam je hitrost v smeri y enaka 0, $v_y(t_m) = 0$ in iz prve enačbe (18) tako sledi $t_m = v_0 \sin\vartheta/g$ (za $a = -g$). Čas leta telesa v primeru, ko ima telo na koncu enako višino kot na začetku, pa je enak kar dvakratnemu času, potrebnemu, da doseže največjo višino, saj za pot navzdol porabi enako kot za pot navzgor.

$$t_D = 2t_m = \frac{2v_0 \sin\vartheta}{g}. \tag{20}$$

V tem času prepotuje v vodoravni smeri pot

$$x_D(\vartheta) = \frac{2v_0^2}{g} \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta\,. \tag{21}$$

Domet je največji, ko je $\sin 2\vartheta = 1$, torej pri $2\vartheta = 90°$, $\vartheta = 45°$. Z nekaj znanja trigonometrije se lahko prepričamo, da velja

$$x_D(\vartheta) = x_D(90° - \vartheta)\,, \tag{22}$$

kar pomeni, da je na primer domet pri kotu 60° enak dometu pri 30°.

Če poznamo obe komponenti hitrosti $v_x(t)$ in $v_y(t)$ ob času t, lahko izračunamo velikost hitrosti in njeno smer

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}\,, \qquad \tan\varphi = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}\,, \tag{23}$$

pri čemer je φ kot, ki ga vektor hitrosti tvori z vodoravnico.

Eksperimentalno merimo čas leta z elektronsko štoparico, za proženje začetka uporabljamo svetlobna vrata. Domet merimo s kovinskim trakom.

1.5 Eksperimentalni postopki

Iztekanje iz posode. Posoda, napolnjena z vodo, ima na dnu cevko s polmerom r, skozi katero izteka vodni curek v vodoravni smeri. Vodni curek ima obliko parabole (19) za $\vartheta = 0$ in $a = g$. Če odčitamo višine (globine) y pri različnih vrednostih vodoravne koordinate x, lahko preverimo, če je tir res parabola. V graf nanašamo na vodoravno os vrednosti x^2, na navpično pa y. Če izmerjene točke v okviru pričakovanih napak pri merjenju ležijo na premici, lahko izjavimo, da je tir res parabola. Naklon premice v grafu $y = y(x^2)$ je kar

$$k = \frac{g}{2v_0^2}\,,$$

od koder iz znanega $g = 9{,}8\ /\mathrm{s}^2$ izračunamo začetno hitrost v_0.

Hitrost curka, ko zapusti ustje cevi, lahko določimo tudi iz enačbe za prostorninski pretok po cevi,

$$\Phi_V = v_0\, S = v_0\, \pi\, r^2\,,$$

pri čemer je Φ_V pretočena prostornina vode v času t, $\Phi_V = V/t$, in r polmer cevi. Prostorninski pretok izmerimo tako, da lovimo vodo v čašo, ki jo nato prelijemo v merilno posodo (menzuro). Merimo seveda še čas natakanja t. Polmer cevke določimo s pomočjo zbirke svedrov, tako da poiščemo sveder, ki se najbolj prilega odprtini in s kljunastim merilom izmerimo njegov premer.

Digitalna videokamera ali fotoaparat. Z digitalnim fotoaparatom ali videokamero, ki omogoča večje število posnetkov v sekundi (vsaj 25), posnamemo poševni met telesa (recimo košarkarske žoge). V ravnini meta postavimo dve merilni palici v vodoravnem in navpičnem položaju. Fotoaparat postavimo v dovolj veliki oddaljenosti od ravnine meta, tako da ne moti paralaksa.

Zaporedje slik prenesemo v računalnik. Slike so pravzaprav lahko spravljene kar v računalniški pomnilniški enoti, ki jo preko USB vhoda priključimo na računalnik. Prva slika naj bo tista, na kateri telo (žoga) že prosto leti. Slike odpiramo s programom za grafično prikazovanje slik (recimo Slikar (MSPaint) ali GIMP), ki prikazuje lego miškinega kazalca v pikslih.

Odpremo prvo sliko in z miško odčitamo koordinate središča žoge. Če izberemo risanje poligonov ali kaj podobnega, bo znak, ki kaže lego miške, v obliki križa, in določitev središča bo lažja. Koordinate so v pikslih; koordinatno izhodišče je v zgornjem *levem* kotu, tako da je navpična os usmerjena navzdol. Pretvornik med piksli in dejanskimi metri dobimo tako, da odčitamo dolžini obeh metrskih palic na sliki. Če fotoaparat zajame 30 slik v sekundi, si slike sledijo v razmikih 1/30 sekunde (podatek je mnogo bolj natančen kot kateri koli drug podatek pri poskusu). Podatke vnesemo v tabelo in koordinate preračunamo v metre. Koordinatno izhodišče prestavimo v središče žoge na prvem posnetku, os y lahko usmerimo navzgor.

Iz koordinat v tabeli izračunamo vodoravno in navpično komponento hitrosti. Narišemo grafa $v_x(t)$ in $v_y(t)$ in skozi izmerjene točke potegnemo premici, ki se najlepše prilegata izmerjenim vrednostim. Iz naklona premice v grafu $v_y(t)$ določimo pospešek; z ekstrapolacijo obeh premic k času 0 pa vektor začetne hitrosti in dvižni kot (glej (23)).